

清华大学

综合论文训练

题目：引力波搜索的理论研究与算法
优化

系 别：自动化系

专 业：自动化专业

姓 名：霍仕胤

指导教师：曹军威 副研究员

2009 年 6 月 10 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内 容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名：_____ 导师签名：_____ 日 期：_____

中文摘要

爱因斯坦在广义相对论中预言了引力波的存在。理论上，如恒星坍缩、超新星爆炸、大质量星体移动等天文现象都会导致比较明显的引力波产生。然而到目前为止，人类还没有成功探测到引力波的存在，由于其巨大学术、军事价值，对宇宙中引力波的探索是国际上的热点问题。

由麻省理工大学、加州理工大学、哥伦比亚大学三校联合主导的 LIGO 项目是引力波探索的主流项目，它的算法部分在 Omega_Pipeline 系统中实现。通过对它底层数学方法的研究，分析其程序各部分执行的效率，最终确定算法优化空间最大的函数，并对该部分程序在 Globus 环境下实现并行化，提高执行效率。

关键词：引力波；Q 变换；网格计算；并行化

ABSTRACT

Albert Einstein predicted the existence of gravitational waves in 1916 as part of the theory of general relativity. Large masses moving suddenly will cause the creature of gravitational waves. However, we have not directly observed it till now. Because of its enormous value of science and military, observing gravitational waves is a hot international topic.

The LIGO project which is founded by MIT、 CalTech and Columbia is the main project for searching gravitational waves. Its algorithm part is achieved in Omega_Pipeline system. This dissertation is mainly about researching on the mathematical method for searching gravitational waves and analyzing the dominate point which decides program's running time. At last, we deserialize the Omega_Pipeline to make it more efficient.

Keywords: Observe gravitational waves;Q transform;Grid computing;Deserialize

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景_LIGO 介绍	1
1.1.1 LIGO 的核心研究内容	1
1.1.2 LIGO 的算法实现部分 Omega_Pipeline	2
1.2 网格计算技术 (Grid Computing)	2
1.2.1 网格定义及现状	2
1.2.2 网格计算的优势	2
1.2.3 网格计算的基本功能	3
1.2.4 网格计算的技术难点	3
1.2.5 网格的计算协议	4
1.2.6 网格的结构	4
1.2.7 网格计算的应用领域	5
1.3 Globus 介绍	7
1.3.1 Globus 的结构和功能 ^[7]	7
1.3.2 Globus 系统元计算工具包	9
1.3.3 Globus 系统的 OGSA	9
1.4 研究内容与方法	10
第 2 章 引力波搜索的有关数学方法	11
2.1 引力波脉冲的参数化	12
2.1.1 特征振幅	12
2.1.2 归一化引力波方程	12
2.1.3 时-频参数化	13
2.1.4 局部引力波脉冲	13
2.1.5 非局部引力波脉冲	14
2.2 引力波脉冲的测量	15
2.2.1 多分辨率分析	15

2.2.2 基底选择	15
2.3 引力波脉冲的检测	18
2.4 连续 Q 变换	19
2.4.1 直接形式	19
2.4.2 变换形式	20
2.5 离散傅立叶变换	21
2.5.1 直接形式	21
2.5.2 快速形式	21
2.6 分析窗	22
2.7 归一化	23
2.7.1 局部引力波脉冲	23
2.7.2 平稳随机过程	25
2.7.3 有噪声的局部引力波脉冲	26
2.7.4 非局部引力波脉冲	27
2.7.5 离散 Q 变换	29
2.7.6 平稳白噪音	30
2.7.7 重要性	31
第 3 章 Omega_Pipeline 的程序结构	33
3.2 Omega Search	35
3.2.1 作用	35
3.2.2 命令格式	35
3.2.3 search 函数形式及输入变量	35
3.2.4 特殊情况说明	36
3.2.5 函数流程	36
3.2.6 wesarch 调用关系图	37
3.3 Omega Scan	39
3.3.1 命令格式	39
3.3.2 scan 函数形式及输入变量	39
3.3.3 函数流程	39
3.4 Omega event	41

3.4.1 命令格式	41
3.4.2 event 函数形式及输入	41
3.4.3 函数流程	41
3.4.4 wevent 的调用关系图	42
3.5 重要参数的结构	44
第 4 章 Omega Wsearch 并行化	49
4.1 Wsearch 运行实例	49
4.2 blockDuration 与 wsearch 运行时间	52
4.3 基于 Globus 平台的并行化	53
4.3.1 并行化程序	53
4.3.2 程序流程	53
4.3.3 运行结果	55
4.4 与单机程序对比	58
第 5 章 结论及展望	59
5.1 并行化优化的结论	59
5.2 展望	59
插图索引	60
表格索引	61
参考文献	62
致 谢	63
声 明	65
附录 A 外文资料的书面翻译	67

第1章 引言

1.1 研究背景_LIGO 介绍

LIGO 是加州理工大学 (CalTech) 和麻省理工大学 (MIT) 的科研合作项目, 由美国自然科学基金 (Nation Science Foundation) 赞助。其全称为 Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory^[1] (激光干涉引力波探测仪)。

1.1.1 LIGO 的核心研究内容

爱因斯坦在 1916 年预言了引力波作为广义相对论的一部分而存在。在相对论下现实中的物质和能量是等价的, 而时间和空间也是现实的不同方面。时空可以被描述成一种由用尺子测量距离、用表测量时间的结构。由于大宗物质和能量的存在, 时空结构产生弯曲, 于是我们就能由此探测到万有引力。自由落体, 无论是足球, 卫星或者是星光, 都简单的沿着弯曲时空中最短路径运动。

当大质量物体快速运动时, 部分时空弯曲会传递到外界, 就像波浪向四周传播一样。例如两个互相旋转的中子星, 中子星是星星爆炸后的残留核。它是个令人难以置信的高密度物体, 一个几英里直径的中子星几乎和太阳质量一样。当两个如此大质量的物体互相旋转时, 时空被他们的运动搅动, 进而引力能量传播到整个宇宙。

LIGO^[2]通过利用激光干涉仪探测时空中的涟漪, 在干涉仪中光在悬挂的镜子中的传播时间被具有高精度的可控激光测量。离得很远的两个镜子形成了干涉仪的一个臂, 另外两个镜子构成与第一个臂垂直的臂。从俯视图上看, 两个臂形成了 L 型。激光通过 L 中心, 能将光线分开的光线分割器进入臂。在回到分割器之前, 允许光线在镜子间反射多次。如果两臂的长度相同, 那么返回分割器的光线之间的干涉, 会将所有光线径直引导至激光。但是如果两臂的长度有差别, 有些光线就会到达光电探测器能够记录的区域。

当引力波经过时, 光线测量出的距离就会改变, 光电探测仪记录的光线量也会改变。然后光电探测仪输出所记录的光线量情况。光电探测仪就像麦克风一样将引力波信号变成电信号。LIGO 计划总共建造了 3 个这样的干涉仪, 分别在华盛顿州和路易斯安那州。LIGO 需要至少两个相隔很远的, 并且运行情况完全相同的探测器, 藉此剔出噪音信号并证实引力波曾经经过, 最终发现引力波的存在。

1.1.2 LIGO 的算法实现部分 Omega_Pipeline

LIGO 是由干涉探测仪构成的硬件系统和以 Omega_Pipeline^[3]构成的软件系统组成。其中 Omega_Pipeline 主要负责对探测到的数据进行后期处理，并通过数学手段分析处理后的数据，发现比较可能有引力波存在的信号时段。

1.2 网格计算技术（Grid Computing）

网格计算^[4]是一门计算机科学，它研究如何把一个需要非常巨大的计算能力才能解决的问题分成许多小的部分，然后把这些部分分配给许多计算机进行处理，最后把这些计算结果综合起来得到最终的结果。

1.2.1 网格定义及现状

网格一词译自英文单词“Grid”，是把整个因特网整合成一台巨大的超级计算机，实现计算资源、存储资源、数据资源、信息资源、知识资源、专家资源的全面共享，其规模可以大到某个洲，小到企事业内部、局域网、甚至家庭和个人。

目前，在复杂科学计算领域中仍然以超级计算机作为主宰，但是由于其造价极高，通常只被用于航天局、气象局这样的国家级部门。网格计算（Grid Computing）作为一种新的计算模式，其低廉的造价和超强的数据处理能力倍受青睐。很多大公司已经投入其中，如“蓝色巨人”IBM正在构筑一项名为“Grid Computing”的计划，旨在通过因特网，向每一台个人电脑提供超级的处理能力。2001年11月，Sun推出了Sun Grid Engine企业版软件的β版，旨在促进网格计算的发展。

1.2.2 网格计算的优势

网格计算是伴随着互联网而迅速发展起来的，专门针对复杂科学计算的新型计算模式。这种计算模式是利用互联网把分散在不同地理位置的电脑组织成一个“虚拟的超级计算机”，每一台参与计算的计算机就是一个“节点”，而整个计算是由成千上万个“节点”组成的“一张网格”。这样组织起来的“虚拟的超级计算机”有两个优势，一个是数据处理能力超强；另一个是能充分利用网上的闲置处理能力。

实际上，网格计算是分布式计算（Distributed Computing）的一种，参与工作的是计算机网络，显然这种方式较以往的以个人计算机为单位的计算方式相比将更加强大的数据处理能力。充分利用网上的闲置处理能力则是网格计算的又

一个优势，网格计算模式首先把要计算的数据分割通常实现的软件是一个预先编制好的屏幕保护程序，然后不同节点的计算机可以根据自己的处理能力下载一个或多个数据片断和这个屏幕保护程序。只要位于某个节点的计算机的用户不使用计算机时，“屏保程序”就会工作，来调动闲置计算能力。^[10]

1.2.3 网格计算的基本功能

网格计算至少需要具备三种基本功能：任务管理、任务调度和资源管理。^[11]

任务管理。用户提交任务、为任务指定所需资源、删除任务并监测任务运行状态。

任务调度。用户提交的任务由该功能按照任务类型、所需资源、可用资源等安排运行日程和策略。

资源管理。确定并监测网格资源状况，收集任务运行时的资源占用数据。

如图 1.1^[5]

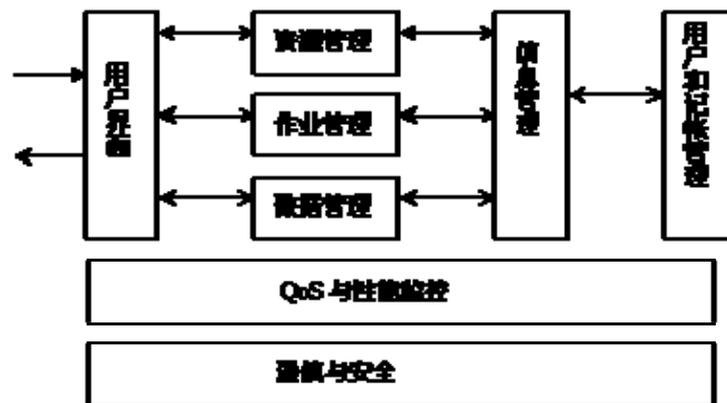


图1.1 网格系统的基本功能模块示意图

1.2.4 网格计算的技术难点

为实现网格计算的目标，必须重点解决三个问题，这三个问题也是目前因特网普遍存在的问题^[12]。

(1)异构性。由于网格由分布在广域网上不同管理域的各种计算资源组成，怎样实现异构机器间的合作和转换是首要问题。

(2)可扩展性。要在网格资源规模不断扩大、应用不断增长的情况下，不降低性能。

(3)动态自适应性。当某一资源出现故障或失败的可能性较高时，资源管理必须能动态监视和管理网格资源，从可利用的资源中选取最佳资源服务。

1.2.5 网格的计算协议

就像 TCP/IP 协议是 Internet 的核心一样，构建网格计算也需要对标准协议和服务进行定义。迄今为止，网格计算还没有正式的标准，但在核心技术上，相关机构与企业已达成一致：由美国 Argonne 国家实验室与南加州大学信息科学学院 (ISI)合作开发的 Globus Toolkit 已成为网格计算事实上的标准，包括 Entropia、IBM、Microsoft、Compaq、Cray、SGI、Sun、Veridian、Fujitsu、Hitachi、NEC 在内的 12 家计算机和软件厂商已宣布将采用 Globus Toolkit。作为一种开放架构和开放标准基础设施，Globus Toolkit 提供了构建网格应用所需的很多基本服务，如安全、资源发现、资源管理、数据访问等。目前所有重大的网格项目都是基于 Globus Toolkit 提供的协议与服务建设的。

1.2.6 网格的结构

目前对网格的体系结构有多种看法，其中五层沙漏结构^[6]最具代表性。参照该结构使用网格中间件来提供一组计算服务，构成沙漏的瓶颈部分，即最中间的那层。从该层向下可屏蔽资源的异构性、动态性和分布性；向上可以提供基于 Web 服务的、透明的、可视化的网格计算环境。从功能上看，该体系结构可以划分为以下四层：应用接口层、中间件层、抽象接口层和资源层，如图 1.2 所示。

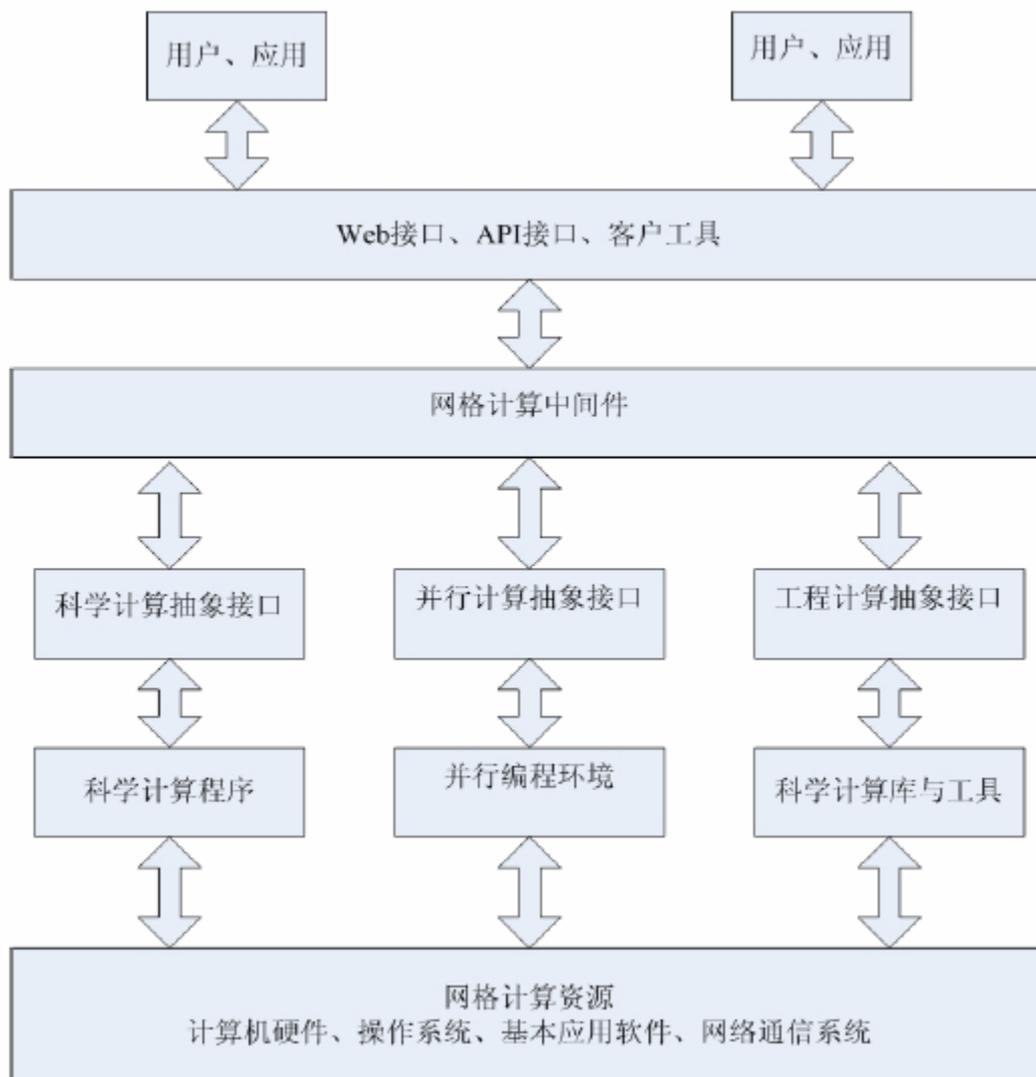


图1.2 网格的五层沙漏模型

1.2.7 网格计算的应用领域

按照 Ian Foster 和 Globus 项目组的观点，网格应用领域目前主要有四类：分布式超级计算、分布式仪器系统、数据密集型计算和远程沉浸。

分布式超级计算(Distributed Supercomputing)^[13]是指将分布在不同地点的超级计算机用高速网络连接起来，并用网格中间件软件“粘合”起来，形成比单台超级计算机强大得多的计算平台。事实上，网格的最初设计目标主要就是要满足更大规模的计算需求，Globus 正是从这类应用起家的。典型的分布式超级计算应用有两个，第一个是军事仿真项目 SF Express，它将大型军事仿真任务分解到分

布式环境中运行，从而在规模上创下了该领域的世界纪录；第二个应用称作数字相对论，它利用网格求解爱因斯坦相对论方程并模拟出天体的运动规律，在 2001 年超级计算会议(Supercomputing 2001)上获得了 Gordon Bell 奖。

分布式仪器系统 (Distributed Instrumentation System) 是指用网格管理分布在各地的贵重仪器系统，提供远程访问仪器设备的手段，提高仪器的利用率，大大方便用户的使用。网格将分布式仪器系统变成了一个非常易于管理和有弹性的系统。

并行计算技术是由一些计算密集型应用推动着的，特别是一些带有重大挑战 (Grand Challenge) 性质的应用，它们大大促进了对高性能并行体系结构、编程环境、大规模可视化等领域的研究。相比之下，数据密集型计算(Data Intensive Computing)的应用好像要比计算密集型应用多得多。它对应的数据网格更侧重于数据的存贮、传输和处理，而计算网格则更侧重于计算能力的提高，所以它们的侧重点和实现技术是不同的。例如目前欧洲原子能研究机构 CERN 所开展的数据网格 DataGrid 项目。

远程沉浸(Tele-immersion)这个术语是在 1996 年 10 月，由伊利诺州大学芝加哥分校的电子可视化实验室 EVL (Electronic Visualization Laboratory)最早提出来的。远程沉浸是一种特殊的网络化虚拟现实环境。远程沉浸是一个典型的网格问题，它所共享的是一个集中的虚拟环境。这个环境可以是对现实或历史的逼真反映，可以是对高性能计算结果或数据库的可视化，也可以是个纯粹虚构的空间。过去几年里，EVL 与十几家合作伙伴一起，开发了一些具有远程沉浸特征的虚拟现实应用，例如虚拟历史博物馆，从网络上进入的参观者不仅可以在虚拟的城池中畅游，还可以与从其他地方进入的网络参观者在同一个虚拟空间中互相交流。

另外，EVL 和交互计算环境实验室 CEL 合作推出了备受关注的 NICE——叙事式沉浸的建设者及协同环境(Narrative Immersive Constructionist / Collaborative Environments)。

2002 年网格首次运用到商业领域。除此以外，网格还可运用于生物医学,提供药品开发人员所需的计算能力，用以研究药物和蛋白质分子的形态与运动；运用于工程；用网格计算进行复杂的仿真与设计；用于数据搜集分析,地理信息科学、制造、石油加工、货物运输、甚至零售企业都要维护昂贵的设备，时常会出现问题，造成不好的结果,网格能够存储和处理所有交易；用于娱乐产业、特殊效果设计、超级视频会议等。

1.3 Globus 介绍

Globus 是美国 Argonne 国家实验室的研发项目，全美有 12 所大学和研究机构参与了该项目。Globus 的网格计算协议建立在互联网协议之上，以互联网协议中的通信、路由、名字解析等功能为基础。Globus 的协议分为五层：构造层、连接层、资源层、汇集层和应用层。每层都有自己的服务、API 和 SDK，上层协议调用下层协议的服务。网格内的全局应用都通过协议提供的服务调用操作系统。

1.3.1 Globus 的结构和功能

Globus 的网格计算协议^[7]建立在互联网协议之上，以互联网协议中的通信、路由、名字解析等功能为基础。Globus 的协议分为五层：构造层、连接层、资源层、汇集层和应用层。每层都有自己的服务、API 和 SDK，上层协议调用下层协议的服务。网格内的全局应用都通过协议提供的服务调用操作系统。如图 1.3 所示。

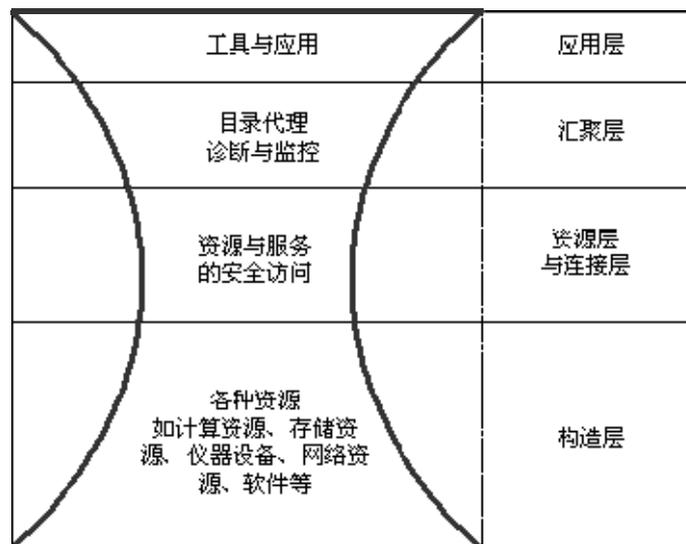


图1.3 Globus协议的五层沙漏结构

构造层（Fabric）向上提供网格中可供共享的资源，它们是物理或逻辑实体。常用的资源包括处理能力、存储系统、目录、网格资源、分布式文件系统、分布

式计算机池、计算机集群等。Toolkit 中相应组件负责侦测可用的软硬件资源的特性、当前负荷、状态等信息，并将其打包供上层协议调用。

连接层（Connectivity） 网格中网络事务处理通信与授权控制的核心协议。通过传输、路由及名字解析实现资源间的数据交换实现；在 Toolkit 中，相应组件采用基于公钥的网格安全基础协议（GSI）。在此协议中提供一次登录、委托授权、局域安全方案整合、基于用户的信任关系等功能实现各资源间的授权验证、安全控制。

资源层(Resource) 对单个资源实施控制，与可用资源进行安全握手、对资源做初始化、监测资源运行状况、统计与付费有关的资源使用数据。在 Toolkit 中有一系列组件用来实现资源注册、资源分配和资源监视。Toolkit 还在这一层定义了客户端的 C、Java 的 API 和 SDK。

汇集层(Collective) 将资源层提交的受控资源汇集在一起，供虚拟组织的应用程序共享、调用。为了对来自应用的共享进行管理和控制，汇集层提供目录服务、资源分配、日程安排、资源代理、资源监测诊断、网格启动、负荷控制、账户管理等多种功能。

应用层（Applications） 网格上用户的应用程序。应用程序通过各层的 API 调用相应的服务，再通过服务调用网格上的资源来完成任务。应用程序的开发涉及大量库函数。

为了便于理解，我们可以将该结构这五层与广为使用的 TCP/IP 网络协议结构进行粗略的对比，如图 1.4 所示。

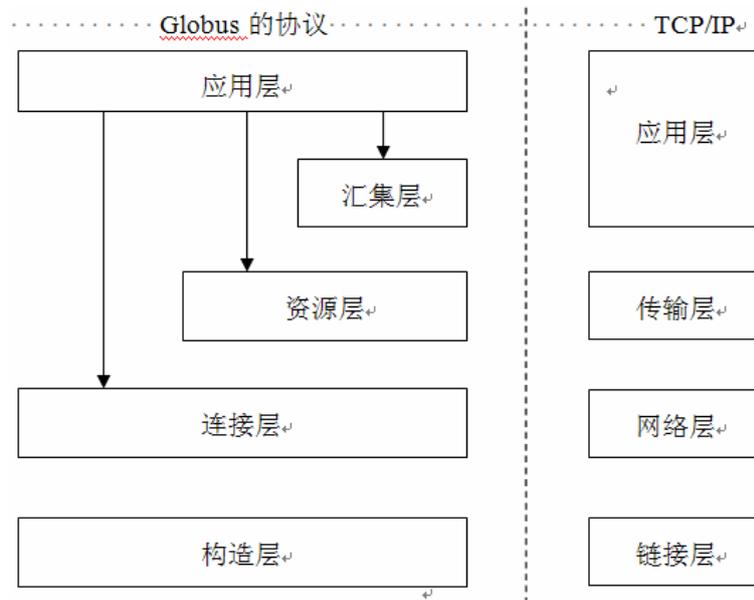


图1.4 五层沙漏结构与TCP/IP协议对比

1.3.2 Globus 系统元计算工具包

Globus 力图实现计算网格结构，来提供对高性能远程计算资源普遍的、可靠的、一致性的访问。Globus 最核心的部分就是它的元计算工具包^[8]，其中定义了构建计算网格最基础的服务。Globus 构建了一个如图所示的虚拟元计算机。

图示的底层是 Globus 的元计算测试床和实验系统，是网络连接的一些有组织的计算网格结点，其中最著名的有 I-WAY 和 GUSTO。I-WAY 是 Globus 的较简化系统，用于气象卫星的实时图像处理。在这个应用中，卫星中的数据下载后，进入一个远程超级计算机进行云层检测处理，然后再由另外一个图形处理机进行气象图绘制。这些处理均在地理上分布的多台机器上实现。I-WAY 成功地验证了 Globus 系统一些基本构件和机制。

GUSTO 在很多方面都被认为是 1998 年以前最大的计算网格实验床。该实验床最初通过专用多模光纤和 Internet 连接 17 个站点、330 个计算机和 3600 个处理器。目前，GUSTO 站点遍布整个美国大陆、夏威夷和德国等，附加站点还在不断增加。

1.3.3 Globus 系统的 OGSA

开放网格服务架构（Open Grid Services Architecture 即 OGSA）定义了分布式计算的一些概念。包括远程操作请求、交换数据，任务管理和安全的标准协议等

关键定义，同时还包括标准的应用程序界面（API）收集，代码库，可重复使用的组件和调试方法。

OGSA^[9]是根据现有的 Globus 工具包的经验中发展起来的。它是一个有四层的模型：最上面的一层是用户应用层，下面的一层被称之为集群服务，它包括目录处理，诊断和监测；在它下面是和服务器、网络进行连接的资源和连接协议；接下来就到了最后的构造层，它包括了网络上的所有设备--存储、计算机、连接、传感器等等。构造层和用户应用层是我们比较熟悉的，中间的两层被定义为网格。

一台计算机可以在要求另一台计算机去完成一项任务的同时，还为其他的机器进行着一项任务。而且，可以在其他人的机器上创建一个任务，再由这台机器来向其他的机器进行进一步地任务分配。在开放标准上以及安全性的要求下，网格管理依靠的是社区授权。

OGSA 支持的虚拟组织（Virtual Organizations 即 VOs）的概念--通过标准的界面和约定--来创建、终止、管理瞬时服务，进行动态管理。定义这些服务的约定使用现有的网络服务定义语言（WDSL），这是一种基于 XML 的，用数据或可执行的内容来表达信息的方法。例如 SOAP, MIME 和 HTTP。

1.4 研究内容与方法

本文的研究主要包括四个方面。

(1)研究目前分析引力波数据的主流思想，整理出 Omega_Pipeline 涉及的数学方法。

(2)完成对 Omega_Pipeline 全部代码的调研，得到各个函数的执行命令、函数之间的调用关系、数据的流动情况，并与 Omega_Pipeline 的数学方法对照，分析每个函数的作用。

(3)分析代码执行的时间消耗情况，发现影响整个系统效率的瓶颈。

(4)对 Omega_Pipeline 中消耗时间最多的部分在 Globus 上实现网格计算，提高系统执行效率。

第2章 引力波搜索的有关数学方法

引力波是由爱因斯坦广义相对论的推论所预言，当物体移动时，时空会受到线性扰动，因而产生以光速传播的引力波。尽管有很多证明引力波存在的间接证据，但是迄今为止，人类从来没有直接探测到引力波。

引力波的探索有重要的科学意义，它不仅仅是广义相对论的直接证明，而且能开启天体物理的新纪元。针对引力波实验能够帮助我们理解在超大时空尺度、高密度条件下的物理状态。

但是探测天文信号并从中发现引力波并不是一件容易的事情，主要有三个难点：

(1)引力波信号很微弱，为了探测引力波需要巨大的干涉仪。这种干涉仪在十年前才刚刚被制造出来。

(2)引力波的信号强度和噪声信号的强度类似，因此需要良好的滤波手段来剔除噪声信号。

(3)最困难的问题是，我们并不知道引力波信号的模型，因此在分析探测数据时，只能通过其它方法来猜测某段信号比较可能包含引力波。本文中主要涉及的方法为：

(1)在对实际噪声信号进行分析后，我们假设噪声呈高斯分布。因此如果某段信号的信噪比很大，则这段信号很可能包含引力波信号。

(2)与“1”中所述方法类似，在本文所述方法中，我们引入一种称作“Q变换”的数学变换，通过对原始数据的变换，得到的结果称作“归一化能量Z”，Z越大则信号为引力波的可能性也越大。

(3)LIGO项目有三个干涉仪，对比它们得到的数据，如果三个数据在同一时间探测到了相似的信号，则该时间点前后的时段比较可能包含引力波信号。

以下文章主要介绍对引力波信号的描述、Q变换的数学方法^[14]以及如何通过这些数学方法搜索引力波信号。

在目前的研究中，大家将可能包含引力波的信号称作“gravitational-wave burst”，在本文，我们将翻译为“引力波信号脉冲”，以下简称“引力波脉冲”

2.1 引力波脉冲的参数化

通常，我们定义引力波是时域中的波动，而且在时域中它是平方可积的。我们假设引力波是短于一秒的，除此之外，不再作更多的限制。这个定义有效的派出了很多干扰信号，但是仍有一些其它信号不能被排除。

经过以往的研究，我们发现通过时-频能量分布来描述引力波比较方便。本文中主要探测引力波的方法是，创造二维时-频图，它可以识别出时变的包含可能含有引力波的频率信息。

本节中我们给出了定义引力波脉冲振幅的方法，另外还定义了一些参数：中心时间、中心频率、持续时间、带宽，它们可以进一步描述 burst 的结构。

以这些参数为基础，我们描述 burst 的方法是将其投影到一些函数基上。由于函数基与原数据是有一定的差异的，因此我们定义了一种算法，使得通过函数基逼近的引力波脉冲有最小的时-频不确定度。

本文后部分章节中，给出了衡量探测器噪声的方法，并藉此给出信号可检测程度的算法。

2.1.1 特征振幅

引力波脉冲的时域表达式和频域表达时可以形成一对傅立叶变换对：

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(f) e^{+i2\pi ft} df \quad (2-1)$$

$$\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2-2)$$

由于前文已经叙述引力波脉冲在时域中是平方可积的，通过帕萨瓦尔方程，我们可以定义引力波脉冲的特征振幅。

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(f)|^2 df. \quad (2-3)$$

2.1.2 归一化引力波方程

引力波脉冲可以描述成特征振幅和一个归一化表达式的乘积，如下所示：

$$h(t) = \|h\| \psi(t) \quad (2-4)$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \tilde{\psi}(f). \quad (2-5)$$

类似地，两个归一化表达式也构成一对傅立叶变换：

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(f) e^{+i2\pi ft} df \quad (2-6)$$

$$\tilde{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2-7)$$

而且它们的平方积分为 1。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(f)|^2 df = 1 \quad (2-8)$$

2.1.3 时-频参数化

将归一化波动的平方看作概率密度函数，则可定义中心时间、中心频率。

$$\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt \quad (2-9)$$

$$\phi = 2 \int_0^{+\infty} f |\tilde{\psi}(f)|^2 df. \quad (2-10)$$

类似地，我们可以定义延续时间、带宽。我们在这里给出平方形式。

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau)^2 |\psi(t)|^2 dt \quad (2-11)$$

$$\sigma_f^2 = 2 \int_0^{+\infty} (f - \phi)^2 |\tilde{\psi}(f)|^2 df \quad (2-12)$$

最后我们定义 Q 参数，它是中心频率和带宽的比值。

$$Q = \frac{\phi}{\sigma_f}. \quad (2-13)$$

2.1.4 局部引力波脉冲

当 burst 不包括频率为零的成分时，式 (2-11)、(2-12) 中所描述的延续时间和带宽满足不确定性关系方程。

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2-14)$$

因此一个引力波不能在一个小于不确定性关系方程的时-频区域内显示它的结构。因此我们定义如果一个引力波的时-频区域近似不确定性关系方程的约束时，则我们说这个引力波被很好的局部化了。

无量纲的参数 Q 是信号在时-频空间里横纵比的衡量，并且和 **burst** 中震动的次数大致相同。进一步，式 (2-14) 所描述的最小时频区域的引力波的时域和频域是高斯正弦曲线的形式。

$$h(t) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma_t^2} \right] \exp \left[i2\pi\phi(t-\tau) \right] \quad (2-15)$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(f-\phi)^2}{4\sigma_f^2} \right] \exp \left[-i2\pi\tau(f-\phi) \right] \quad (2-16)$$

由于 $Q < 3$ 时，在前面假设的参数中会出现零点混叠现象，因此我们在实际中只用这种方法研究 $Q > 3$ 的引力波脉冲。如果想要探测 $Q < 3$ 的引力波脉冲，需要依据它在信号空间的投影是否能够达到 $Q > 3$ 。

当 $Q < 3$ 时，式 (2-15)、(2-16) 有另外的形式如下。

$$h(t) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma_t^2} \right] \quad (2-17)$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \left(2\pi\sigma_t^2 \right)^{1/4} \exp \left[-\pi^2\sigma_t^2 f^2 \right] \exp \left[-i2\pi\tau f \right] \quad (2-18)$$

2.1.5 非局部引力波脉冲

通过以上局部的时-频空间内将引力波脉冲参数化的方法不能对更复杂的引力波脉冲进行很好的参数化。但是复杂的引力波脉冲在小的时频尺度还是满足不确定性方程 (2-14)。

因此我们常用的处理方法就是将这种复杂引力波脉冲分成一系列局部引力波脉冲的线性组合。

2.2 引力波脉冲的测量

基于我们目前对引力波的认识，可以得出三种正确的测量方向：

1 我们已经知道某个方向会出现引力波，比如说某方向出现了超新星爆炸，这时引力波信号的方向明确，而且我们知道它的模型。

2 很多个探测器同时测量到的数据

3 测量到很少被人知道的波信号

第一种情况，波形被很好的建模时。数据先经过白噪音处理，然后再投影到一些同样也被白噪音处理的天体波形上。这种方法是最优线性滤波器，它最大化了实测数据和噪音的比值。

对于第二种情况，最理想的方法就是将一个探测器的一段信号投影到另一个探测器相应的信号区间上。当两个探测器都探测到引力波脉冲时，该方法的信噪比达到最大。

考虑到这种方法的计算消耗，本方法只应用于对短时间的信号进行细致探测

对于这种很少有人知道的波动形式，我们的做法是将其投影到一些基上，在通过一些诸如聚类的手段逐渐寻找与此波动形式最接近的基。

2.2.1 多分辨率分析

在本分析中，我们着力于寻找一种算法，对地面干涉探测器能够探测到的数据进行分析，寻找引力波脉冲，我们将方程 (2-15)、(2-16) 作为我们的基底方程，这样做的理由如下：

(1)引力波的时频区域是由不确定关系方程确定的，通过选择一些最小不确定度的波作为基底，我们可以最大化的解析引力波脉冲的时频结构。

(2)将以上作为基础的测量方法能提供候选事件的最小时频区间界。这有两个好处，第一我们能够确定一些不重叠的、有着最小不确定性的波（它们将候选事件的所有能量集中到了最少数量的基上）的最匹配基。其次，我们能对多个探测器同时探测到的事件进行最严格的测试。

一个多分辨率的时频基一般包括时域内具有短持续时间、 Q 小的 δ 函数。因为选择的基底是过完备的，因此基底函数一般不交。

2.2.2 基底选择

我们有两个目标：

(1)希望局部的引力波脉冲能够和一个基底方程比较匹配。

(2)希望有较少的基底方程，这样有较少的计算量。

比较幸运的是，在选择基底时，我们不需要考虑探测器的噪音。而且在实际中，我们搜索的是白化后的数据，而不是原始数据。

为了构造基底，我们首先将式(2-15)和式(2-16)写成归一化形式，式(2-19)与式(2-20)。

$$\psi(t; \tau, \phi, Q) = \left(\frac{8\pi\phi^2}{Q^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{4\pi^2\phi^2}{Q^2}(t - \tau)^2 \right] \exp[-i2\pi\phi(t - \tau)] \quad (2-19)$$

$$\tilde{\psi}(f; \tau, \phi, Q) = \left(\frac{Q^2}{2\pi\phi^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{Q^2}{4\phi^2}(f - \phi)^2 \right] \exp[-i2\pi\tau(f - \phi)]. \quad (2-20)$$

这样做我们就已经考虑到了高斯正弦引力波脉冲的最小不确定性性质，这就要求它们的带宽和持续时间不能随便选择。

事实上，我们只需要考虑三个参数，中心时间 τ ，中心频率 Φ ，质量参数 Q 。本方法就是找到以上三个参数的最优值，使得基底与实际信号的能量流失小于一个阈值。

为了得到最终结果，首先我们定义采用基底逼近后的偏差表达式：

$$\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t; \tau, \phi, Q) \psi^*(t; \tau + \delta\tau, \phi + \delta\phi, Q + \delta Q) dt \quad (2-21)$$

它的模的平方为：

$$|\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q)|^2 = \frac{2x_\phi x_Q}{x_\phi^2 + x_Q^2} \exp \left(-\frac{8\pi^2\phi^2 x_\phi^2 \delta\tau^2}{Q^2(x_\phi^2 + x_Q^2)} \right) \exp \left(-\frac{Q^2 x_Q^2 \delta\phi^2}{2\phi^2(x_\phi^2 + x_Q^2)} \right).$$

(2-22)

接下来，我们可以定义能量损失的微分：

$$\mu(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) = 1 - |\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q)|^2. \quad (2-23)$$

展开式(2-23)到二次无穷小的形式如下：

$$\mu(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) \simeq \frac{4\pi^2\phi^2}{Q^2} \delta\tau^2 + \frac{2+Q^2}{4\phi^2} \delta\phi^2 + \frac{1}{2Q^2} \delta Q^2 - \frac{1}{\phi Q} \delta\phi \delta Q.$$

(2-24)

标准化形式如下：

$$\delta s^2 = g_{\tau\tau} \delta\tau^2 + g_{\phi\phi} \delta\phi^2 + g_{QQ} \delta Q^2 + 2g_{\phi Q} \delta\phi \delta Q. \quad (2-25)$$

其中：

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau} &= \frac{4\pi\phi^2}{Q^2} \\ g_{\phi\phi} &= \frac{2+Q^2}{4\phi^2} \\ g_{QQ} &= \frac{1}{2Q^2} \\ g_{\phi Q} &= -\frac{1}{2\phi Q}. \end{aligned} \quad (2-26)$$

进一步，我们可以得到累积偏差的表达式：

$$\begin{aligned} s_\tau &= \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g_{\tau\tau}^{1/2} d\tau = \frac{2\pi\phi}{Q} (\tau_{\max} - \tau_{\min}) \\ s_\phi &= \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} g_{\phi\phi}^{1/2} d\phi = \frac{(2+Q^2)^{1/2}}{2} \ln \left(\frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} \right) \\ s_Q &= \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} g_{QQ}^{1/2} dQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} \right). \end{aligned} \quad (2-27)$$

为了表达清晰，进一步有：

$$\begin{aligned} N_\tau &= \left[\frac{s_\tau}{\delta s_{\max}} \right] \\ N_\phi &= \left[\frac{s_\phi}{\delta s_{\max}} \right] \\ N_Q &= \left[\frac{s_Q}{\delta s_{\max}} \right] \end{aligned} \quad (2-28)$$

最终的结论为：

1. 将时间、频率、Q 三者构成的空间分块，首先选择 Q_s 为：

$$Q_n = Q_{\min} \exp \left[\sqrt{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{s_Q}{N_Q} \right] \quad 1 \leq n \leq N_Q. \quad (2-29)$$

2. 对每一个 Q，选择频率为：

$$\phi_n = \phi_{\min} \exp \left[\frac{2}{(2 + Q^2)^{1/2}} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{s_\phi}{N_\phi} \right] \quad 1 \leq n \leq N_\phi. \quad (2-30)$$

3. 对每一个 Φ 和 Q，选择 时间为：

$$\tau_n = \tau_{\min} + \frac{Q}{2\pi\phi} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{s_\tau}{N_\tau} \quad 1 \leq n \leq N_\tau. \quad (2-31)$$

我们最终发现，基底方程的结果 Q 是成对数分布，频率成对数分布，时间成线性分布。

2.3 引力波脉冲的检测

介绍探测器噪音在引力波脉冲检测方面的作用。

在这里，我们假设目标信号源已经被提前建模完毕，并且由最优滤波器的理论，我们得到，最大的可达到信噪比为：

$$\rho_0 = \left[\int_0^\infty \frac{4|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df \right]^{1/2}. \quad (2-32)$$

尽管信号的模型并不是能提前被建立，但是以上的方程代表了在利用最优线性滤波器时，引力波脉冲的最好可探测性。

我们还假设探测器噪音频谱在频域是恒定的，于是我们就可以将它从积分中去除，得到式 (2-33)

$$\rho_0 \simeq \left[\frac{2}{S_n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(f)|^2 df \right]^{1/2} \quad (2-33)$$

再利用佛立叶变换的对称性，进一步可得到：

$$\rho_0 \simeq \sqrt{2} \|h\| / S_n^{1/2}. \quad (2-34)$$

因此，通过对引力波脉冲的幅度与探测器的幅度谱密度之比就可以粗略得到信号源的可探测性。

下面我们简要的介绍有关可探测性的式

寻找引力波源发射的总能量与探测器接收到的信号幅度之间的关系。

$$E = \frac{\pi^2 c^3}{G} r^2 \|h\|^2 \langle f^2 \rangle \quad (2-35)$$

考虑到最优滤波器的信噪比为：

$$\rho_0^2 = \frac{\|h\|^2}{\langle S_n(f) \rangle}. \quad (2-36)$$

我们最终得到：

$$E = \frac{\pi^2 c^3}{G} r^2 \rho_0^2 \langle S_n(f) \rangle \langle f^2 \rangle. \quad (2-37)$$

2.4 连续 Q 变换

前文中我们提出利用多分辨率基底的局部方程，来搜索引力波脉冲。本节我们介绍它的具体工具——Q 变换，Q 变换是短时间佛立叶变换的改善。

连续 Q 变换有两种方法。直接的时域变换和频域的替换变换。其中频域的变换对开发出离散 Q 变换具有重要意义。

2.4.1 直接形式

这是 Q 变换的基本形式，将连续时间序列投影到具有复合参数的窗上，式 (2-38) 如下：

$$X(\tau, \phi, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t - \tau, \phi, Q) e^{-i2\pi\phi t} dt, \quad (2-38)$$

$w(t - \tau, \phi, Q)$ 是一个时域的窗，以时间 τ 为中心，与 Q 成正比，与频率 ϕ 成反比。返回的复数参数 $X(\tau, \phi, Q)$ 是对信号的在一个以 τ 为中心时间、 ϕ 为中心频率的时频区域上的平均幅值和相位的衡量。

2.4.2 变换形式

为了得到变换时频域上的连续 Q 变换，我们定义输入调制后的时间序列信号形式为：

$$v(t, \phi) = x(t) e^{-i2\pi\phi t} \quad (2-39)$$

式 (2-38) 就变成了：

$$X(\tau, \phi, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, \phi) w(t - \tau, \phi, Q) dt \quad (2-40)$$

这里我们发现了在时间和 ϕ 与 Q 上的互相关。这包含了一个变换的傅立叶空间表示：

$$\begin{aligned} \tilde{v}(f, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, \phi) e^{-i2\pi ft} dt \\ \tilde{w}(f, \phi, Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, \phi, Q) e^{-i2\pi ft} dt \\ \tilde{X}(f, \phi, Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau, \phi, Q) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2-41)$$

于是 Q 变换的形式就 变成了：

$$\tilde{X}(f, \phi, Q) = \tilde{v}(f, \phi) \tilde{w}^*(f, \phi, Q), \quad (2-42)$$

星号上标表示复数的共轭。这里我们重申 ϕ 是 Q 变换目标频率， f 才是频率变量。

另外有：

$$\tilde{v}(f, \phi) = \tilde{x}(f + \phi), \quad (2-43)$$

其中：

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (2-44)$$

最终，我们得到：

$$X(\tau, \phi, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f + \phi) \tilde{w}^*(f, \phi, Q) e^{+i2\pi f\tau} df. \quad (2-45)$$

式 (2-45) 的好处是，信号的傅立叶变换只需要计算一次。得到的复数形式序列是对信号在以频率 ϕ 为中心、 ϕ/Q 为带宽的幅值和相角的衡量。

2.5 离散傅立叶变换

尽管连续型 Q 变换能够用来估计任意时间、频率和 Q 下的信号，但是在实际中这并不必要。在时间、频率、Q 中临近的基底方程会产生大量的相关投影。实际上，我们只需要在一些不关联的参数上估计 Q 变换从而检测重要的事件。

我们提出两种离散 Q 变换。第一种是对直接连续型 Q 变换的离散化，第二种是对频域形式的 Q 变换的离散化（吸取了快速傅立叶变换的长处）。

2.5.1 直接形式

与式 (2-38) 类似，就是对它的离散化：

$$X[m, l, Q] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n - m, l, Q] e^{-i2\pi nl/N}. \quad (2-46)$$

2.5.2 快速形式

与式 (2-45) 类似，我们提出快速离散变换形式。首先，定义输入形式为：

$$v[n, l] = x[n] e^{-i2\pi nl/N}. \quad (2-47)$$

式 (2-46) 就变成了：

$$X[m, l, Q] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n, l] w[n - m, l, Q] \quad (2-48)$$

假设 $v[n, l]$ 和 $w[n, l, Q]$ 是以 N 为周期的，我们认为它是在固定的频率指数 (frequency index) 和 Q 上的循环互相关。这暗示了另一种离散化的傅立叶空间表示：

$$\begin{aligned}
\tilde{v}[k, l] &= \sum_{n=0}^{N-1} v[n, l] e^{-i2\pi nk/N} \\
\tilde{w}[k, l, Q] &= \sum_{n=0}^{N-1} w[n, l, Q] e^{-i2\pi nk/N} \\
\tilde{X}[k, l, Q] &= \sum_{m=0}^{N-1} X[m, l, Q] e^{-i2\pi mk/N},
\end{aligned} \tag{2-49}$$

于是离散化的 Q 变换就是：

$$\tilde{X}[k, l, Q] = \tilde{v}[k, l] \tilde{w}^*[k, l, Q]. \tag{2-50}$$

根据式 (2-47) 和离散傅立叶变换的周期性频率转移性质，我们得到

$$\tilde{v}[k, l] = \tilde{x}[k + l], \tag{2-51}$$

其中：

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N} \tag{2-52}$$

是标准的离散傅立叶变换。

变换回时域我们得到想要的 Q 变换：

$$X[m, l, Q] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k + l] \tilde{w}^*[k, l, Q] e^{+i2\pi mk/N} \tag{2-53}$$

它的计算代价比 $N \log N$ 略小，因此我们将式 (2-53) 称做快速离散 Q 变换。

2.6 分析窗

事实上，高斯窗 (Gaussian window) 的使用与离散 Q 变换的假设——周期化的窗序列是不协调的。因此不可能选择一个合适的分析窗能够达到理论上的最小时频不确定性。在实际中，我们综合考虑时频不确定性、简单性、计算效率、最小频谱泄露等因素，选择合适的高斯窗。

基于我们的目的，我们发现选择构造一个频域所谓的“双平方孔涅窗” (bisquare Connes) 很方便，形式如下：

$$\tilde{w}(f) = \begin{cases} A(1 - (f/\Delta f)^2)^2 & |f| < \Delta f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2-54)$$

Δf 是窗在零幅值时带宽的一半， A 是一个归一化的量。为方便起见，我们假设窗以零为时间和频率的中心。

这种窗的选择有很多好处：

(1) 频域中的形式简单。

(2) 在频域中的非零范围有限。在计算离散 Q 变换时就能有较短的周期，使得计算效率提高，并且这种窗的选择可以使归一化保证对全部信号能量的精确计算。

(3) 它很接近最小时频不确定性。实际上它只比最小时频不确定性大 4.5%

(4) 双平方窗引起能量泄露很小。（第一瓣的能量大）

为了防止频率混叠现象，我们规定 Q 的最小值和频率指数 l 的最大值。

$$\begin{aligned} Q &\geq \sqrt{11} \\ l &\leq \frac{N}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{11}}{Q}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2-55)$$

2.7 归一化

本节讨论 Q 变换应用在不同信号时的归一化。

2.7.1 局部引力波脉冲

我们首先考虑对双平方窗的适当归一化，使得将它运用到局部引力波脉冲时，最佳匹配 Q 变换参数的幅值是引力波脉冲的特征幅值 $\|h\|$ 的精确衡量。

我们希望得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t; \tau, \phi, Q) w(t - \tau, \phi, Q) e^{-i2\pi\phi t} dt = \|h\| e^{i\theta}, \quad (2-56)$$

假设信号和分析窗有相同的中心事件、中心频率和 Q ，并且它们之间有一个相位差。

为了达到这个目的，我们考虑一个和分析窗有相同的中心事件、中心频率和 Q 的测试信号。为了简单起见，并且不失一般性，我们不考虑 ϕ 和 Q（认为是恒定的），令 $\tau = 0$ 。在这种情况下，测试信号在时域和频域的表达为：

$$\begin{aligned} h(t) &= B \|h\| w(t) \cos(2\pi\phi t + \theta) \\ \tilde{h}(f) &= B \|h\| [\tilde{w}(f - \phi)e^{i\theta} + \tilde{w}(f + \phi)e^{-i\theta}] / 2. \end{aligned} \quad (2-57)$$

B 是一个归一化参数，它的选择必须与方程 2.3 相协调，且测试信号必须满足归一化条件：

$$\frac{B^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(f)|^2 df = 1. \quad (2-58)$$

如果我们引入频域连续 Q 变换，可以得到表达式：

$$H(\tau, \phi, Q) = \frac{B}{2} \|h\| \int_{-\infty}^{+\infty} [|\tilde{w}(f)|^2 e^{i\theta} + \tilde{w}(f + 2\phi)\tilde{w}^*(f)e^{-i\theta}] df. \quad (2-59)$$

为了满足方程（2-56）的条件，我们发现归一化条件：

$$\frac{B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(f)|^2 df = 1. \quad (2-60)$$

如果 B 是单位值并且窗满足如下条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(f)|^2 df = 2. \quad (2-61)$$

那么（2-58）和（2-60）能得到满足，并且信号的特征振幅（characteristic strain amplitude）被精确获得。A 还需要满足

$$A^2 = \frac{315}{128\sqrt{11}} \frac{Q}{\phi}, \quad (2-62)$$

我们给出方程（2-45）中归一化窗的最终形式：

$$\tilde{w}(f, \phi, Q) = \begin{cases} \left(\frac{315}{128\sqrt{11}} \frac{Q}{\phi} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{fQ}{\phi\sqrt{11}} \right)^2 \right]^2 & |f| < \frac{\phi\sqrt{11}}{Q} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2-63)$$

2.7.2 平稳随机过程

这样归一化后，结果参数的幅值对 Q 变换应用在平稳随机过程有很有用的解释。我们首先研究连续型 Q 变换应用于平稳随机过程 $n(t)$ 的情况。

$$N(\tau, \phi, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) w(t - \tau, \phi, Q) e^{-i2\pi\phi t} dt. \quad (2-64)$$

平方幅值为：

$$|N(\tau, \phi, Q)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) n(t') w(t - \tau) w(t' - \tau) e^{-i2\pi\phi(t-t')} dt dt'. \quad (2-65)$$

由于数据的随机性质，得到的平方幅值也是随机变量。不是一般性的，令 $\tau = 0$ 。则结果变为：

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle n(t) n(t') \rangle w(t) w(t') e^{-i2\pi\phi(t-t')} dt dt'. \quad (2-66)$$

由于平稳性，用 $t-T$ 替换 t'

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle n(t) n(t-T) \rangle w(t) w(t-T) e^{-i2\pi\phi T} dt dT. \quad (2-67)$$

接下来，我们发现右手边的期望值是 $n(t)$ 在滞后 T 时的平稳自相关

$$r_n(T) = \langle n(t) n(t-T) \rangle. \quad (2-68)$$

得到：

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r_n(T) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) w(t-T) dt \right) e^{-i2\pi\phi T} dT. \quad (2-69)$$

进一步有：

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) |\tilde{w}(\phi - f)|^2 df. \quad (2-70)$$

这里 $G_n(f)$ 是 $n(t)$ 的能量谱密度，并且我们用到了傅立叶变换关系：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) w(t-T) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(f)|^2 e^{-i2\pi\phi T} df, \quad (2-71)$$

适当的选择 Q 后，利用能量谱密度 $S_n(f)$ ，改写 (2-70) 为：

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_n(f) |\tilde{w}(\phi - f)|^2 df \quad (2-72)$$

因此，将 Q 变换应用到平稳随机过程后，得到的幅值的平方就是信号在分析窗带宽上，平均单边能量谱密度的衡量。且如果能量谱密度几乎不变的话，可以得到：

$$\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle \simeq S_n(\phi). \quad (2-73)$$

2.7.3 有噪声的局部引力波脉冲

这时，输入信号为：

$$x(t) = n(t) + h(t - \tau, \phi, Q), \quad (2-74)$$

其中， $n(t)$ 是单边能量谱密度为 $S_n(f)$ 的平稳随机过程， $h(t - \tau, \phi, Q)$ 是局部 burst（中心时间为 τ ，中心频率为 ϕ ，特征参数(quality factor) 为 Q ）。由于 Q 变换的线性，我们得到：

$$|X(\tau, \phi, Q)|^2 = \|h\|^2 + |N(\tau, \phi, Q)|^2 + 2\|h\| |N(\tau, \phi, Q)| \cos \theta, \quad (2-75)$$

其中 $\|h\|$ 是局部 burst 的特征幅值， $N(\tau, \phi, Q)$ 是 Q 变换对探测器噪音作用的结果， θ 两个 Q 变换的相位差。

我们不关心单次试验的情况，而是关心多次实验的平均值。这种情况下，由于对称性，县委变量消失了，只剩下积分和：

$$\langle |X(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle = \|h\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty S_n(f) |\tilde{w}(\phi - f)|^2 df. \quad (2-76)$$

如果探测器的能量谱密度是在引力波脉冲的带宽是恒定的话，我们得到简单的结果：

$$\langle |X(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle \simeq \|h\|^2 + S_n(f). \quad (2-77)$$

进一步，我们可以定义信噪比的平方：

$$\rho^2 = \frac{\langle |X(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle}{\langle |N(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle} - 1, \quad (2-78)$$

对于一个局部单调的探测器噪音谱而言，能得到直观结果：

$$\rho^2 \simeq \frac{\|h\|^2}{S_n(f)}. \quad (2-79)$$

因此，只要噪音谱接近恒定，则信噪比与特征幅值 $\|h\|$ 直接相关。需要指出的是，对于不能局部化的引力波脉冲，或者探测器噪声谱在引力波脉冲的带宽上显著变化，则通过 Q 变换，我们得不到理想的信噪比。为了避免一系列由探测器噪音对频率的依赖而引起的困难，我们先将信号白噪音化即可解决。

事实上，我们不能测定方程 (2-78) 所叙述的理论化信噪比。相反，假设噪音是平稳的，则单个引力波脉冲的能量可以被估计为：

$$\|\hat{h}\|^2 = |X(\tau, \phi, Q)|^2 - \langle |X(t, \phi, Q)|^2 \rangle, \quad (2-80)$$

相应的信噪比估计为：

$$\hat{\rho}^2 = \frac{|X(\tau, \phi, Q)|^2}{\langle |X(t, \phi, Q)|^2 \rangle} - 1. \quad (2-81)$$

其中 $|X(\tau, \phi, Q)|^2$ 由方程 (2-75) 给出， $\langle |X(\tau, \phi, Q)|^2 \rangle$ 是与 burst 有着相同频率、相同 Q 但时间在 t 而不在 τ 的时频块 (time-frequency tiles) 上的平均能量。

2.7.4 非局部引力波脉冲

在之前的章节中，局部引力波脉冲都是能够由一个时频块来研究 (脉冲的所有能量都落在这个块中)，在本节中，我们需要研究整个时频平面。我们首先考虑对 Q 变换幅值平方在整个时域上的积分，利用帕塞瓦尔定理的标准形式和方程 (2-41) 所述的傅立叶变换得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{X}(f, \phi, Q)|^2 df. \quad (2-82)$$

接下来，用 (2-42) 和 (2-43) 来代替，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(f + \phi)|^2 |\tilde{w}(f, \phi, Q)|^2 df. \quad (2-83)$$

通过变量替换，我们令 $\psi = f + \phi$ ，于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(\psi)|^2 |\tilde{w}(\psi - \phi, \phi, Q)|^2 d\psi. \quad (2-84)$$

对 Φ 在正半边积分，有：

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau d\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(\psi)|^2 \int_0^{\infty} |\tilde{w}(\psi - \phi, \phi, Q)|^2 d\phi d\psi. \quad (2-85)$$

如果我们已经选择与方程 (2-55) 相和谐的 Q ，如果我们进一步要求窗归一化条件：

$$\int_0^{\infty} |\tilde{w}(\psi - \phi, \phi, Q)|^2 d\phi = \begin{cases} 2 & \psi > 0, \\ 0 & \psi \leq 0, \end{cases} \quad (2-86)$$

于是式 (2-85) 演化为：

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau d\phi = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{x}(\psi)|^2 d\psi \quad (2-87)$$

最终，若 $x(t)$ 是实值的，那么有：

$$2 \int_0^{\infty} |\tilde{x}(\psi)|^2 d\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(\psi)|^2 d\psi = \|x\|^2. \quad (2-88)$$

因此，如果方程 (2-86) 的归一化条件能够满足，那么我们可以得到

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\tau, \phi, Q)|^2 d\tau d\phi = \|x\|^2. \quad (2-89)$$

对方程 (2-54) 所提到的 A 参数，我们令

$$A^2 = \frac{315}{128\sqrt{11}} \frac{Q}{\phi} A_1^2. \quad (2-90)$$

寻找矫正系数 A_1 使得 A 满足 (2-86)

为方便起见，令：

$$q = Q/\sqrt{11}, \quad (2-91)$$

通过计算得到 A_1 的方程为：

$$A_1^2 = \frac{256}{315q} \left[(q^8 - 4q^6 + 6q^4 - 4q^2 + 1) \ln \left(\frac{q+1}{q-1} \right) + \left(-2q^7 + \frac{22}{3}q^5 - \frac{146}{15}q^3 + \frac{186}{35}q \right) \right]^{-1}. \quad (2-92)$$

在本节所讨论的非局部引力波脉冲中，由于噪音信号在方程（2-89）所示的积分中是不收敛的，因此噪音信号的全部能量没有意义。相反我们只对时频平面的一部分进行积分，它需要足够大以至于能够包含整个引力波脉冲。但是这样做的前提是知道噪音信号的能量积分。在实际中，可以通过对相似时频区域的能量积分进行测定，从而估计整体的能量积分。

2.7.5 离散 Q 变换

假设离散的输入 $x[n]$ 是对连续数据 $x(t)$ 的周期采样。

$$x[n] = x(n dt). \quad (2-93)$$

考虑到离散、连续两种傅立叶变换：

$$\begin{aligned} \tilde{x}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ \tilde{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi nk/N}, \end{aligned} \quad (2-94)$$

我们发现频域的输入信号大概满足关系：

$$\tilde{x}[k] \simeq \frac{\tilde{x}(k df)}{dt}, \quad (2-95)$$

考虑到两种 Q 变换：

$$\begin{aligned} X(\tau, \phi, Q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f + \phi) \tilde{w}^*(f, \phi, Q) e^{-i2\pi f\tau} df \\ X[m, l, Q] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k + l] \tilde{w}^*[k, l, Q] e^{-i2\pi mk/N}, \end{aligned} \quad (2-96)$$

我们发现，离散变换得到的结果接近于对连续结果的采样，如果满足以下条件：

$$\tilde{w}[k, l, Q] \simeq \tilde{w}(k df, l df, q) N dt df. \quad (2-97)$$

如果在长度为 N 的数据中只有 M 个数据不为零，那么我们只对长度为 M 的数据进行离散 Q 变换，而不是 N，结果如下：

$$X\left[m \frac{M}{N}, l, Q\right] = \frac{M}{N} \frac{1}{M} \sum_k \tilde{x}[k + l] \tilde{w}^*[k, l, Q] e^{-i2\pi m(M/N)k/M}. \quad (2-98)$$

其中：

$$0 \leq k \leq \frac{M}{2} \quad \text{and} \quad N - \frac{M}{2} + 1 \leq k \leq N - 1. \quad (2-99)$$

以上是降采样的过程。

2.7.6 平稳白噪音

我们假设输入的信号包含理想的平稳白噪音，并且平均值为 0 (zero mean)，方差为单位值 (unity standard deviation)。为了研究方便，我们将实部和虚部 (real and imaginary components) 分开考虑。我们将 Q 变换写作：

$$X[m, l, Q] = X_R[m, l, Q] + iX_I[m, l, Q]. \quad (2-100)$$

其中实部和虚部形式如下：

$$\begin{aligned} X_R[m, l, Q] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n - m, l, Q] \cos(2\pi nl/N), \\ X_I[m, l, Q] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[n - m, l, Q] \sin(2\pi nl/N). \end{aligned} \quad (2-101)$$

对应的基底方成如下：

$$\begin{aligned} b_R[n; m, l, Q] &= w[n - m, l, Q] \cos(2\pi nl/N), \\ b_I[n; m, l, Q] &= w[n - m, l, Q] \sin(2\pi nl/N). \end{aligned} \quad (2-102)$$

如果基底方程有足够的持续时间，那么由于中心极限定理可以得到实部与虚部的分布形式。通常 $X_R[m, l, Q]$ 和 $X_I[m, l, Q]$ 都是高斯分布，并且平均值为 0 (zero mean)，方差如下：

$$\begin{aligned} \sigma_R^2[m, l, Q] &= \sum_{n=0}^{N-1} |b_R[n; m, l, Q]|^2, \\ \sigma_I^2[m, l, Q] &= \sum_{n=0}^{N-1} |b_I[n; m, l, Q]|^2. \end{aligned} \quad (2-103)$$

可以发现，结果的分布于输入噪音分布无关。由于，Q 变换的结果是复数，且满足：

$$\begin{aligned} |X| &= (X_R^2 + X_I^2)^{1/2}, \\ \angle X &= \tan^{-1}(X_I/X_R), \end{aligned} \quad (2-104)$$

经过必要的数学推导，可以得到 X 幅值的分布：

$$f(|X|) d|X| = \frac{|X|}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{|X|^2}{2\sigma_X^2}\right) d|X|, \quad (2-105)$$

还可以得到 Q 变换结果幅值平方的分布：

$$f(|X|^2) d|X|^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{|X|^2}{2\sigma^2}\right) d|X|^2, \quad (2-106)$$

是指数分布的形式。

2.7.7 重要性

我们定义一些衡量引力波脉冲的可检测性 (detectability) 的量。由方程 (2-106) 知， Q 变换结果幅值平方的平均值为：

$$\langle |X|^2 \rangle = 2\sigma_X^2. \quad (2-107)$$

于是我们定义 Q 变换结果的归一化能量为：

$$Z = |X|^2 / \langle |X|^2 \rangle, \quad (2-108)$$

且：

$$f(Z) dZ = \exp(-Z) dZ. \quad (2-109)$$

发现具有更大归一化能量的概率为：

$$P(Z' > Z) = \exp(-Z). \quad (2-110)$$

且将 (2-110) 的值定义为 Q 变换结果的重要性 (Significance)

Z 与方程 (2-81) 中信噪比的估计有很大关系：

$$\hat{\rho}^2 = Z - 1. \quad (2-111)$$

Z 、重要性、信噪比三者都与 **burst** 的探测有很大关系，我们通过对它们设定阈值来确定候选引力波脉冲。我们通常采用 Z 作为衡量 **tile** 重要性的首要方法。在探测非局部引力波脉冲时，我们一般通过比较一些块的聚类的重要性。 M 个 **tile** 构成的聚类的联合白噪音概率分布为：

$$f(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z} = \prod_{i=1}^M \exp(-Z_i) dZ_i. \quad (2-112)$$

归一化能量为：

$$Z_C = \sum_{i=1}^M Z_i. \quad (2-113)$$

分布为：

$$f(Z_C) dZ_C = \frac{Z_C^{M-1} \exp(-Z_C)}{\Gamma(M)} dZ_C. \quad (2-114)$$

发现更大的 Z_C 的概率（也是它的重要性）为：

$$P(Z'_C > Z_C) = \frac{\Gamma(M, Z_C)}{\Gamma(M)}, \quad (2-115)$$

其中：

$$\Gamma(M, Z_C) = \int_{Z_C}^{\infty} Z'_C{}^{M-1} \exp(-Z'_C) dZ'_C. \quad (2-116)$$

第3章 Omega_Pipeline 的程序结构

Omega_Pipeline 是 LIGO 中对探测结果进行后期分析的系统，它最主要的功能就是处理数据，得到比较可能包含引力波的部分。信息流示意图如下：

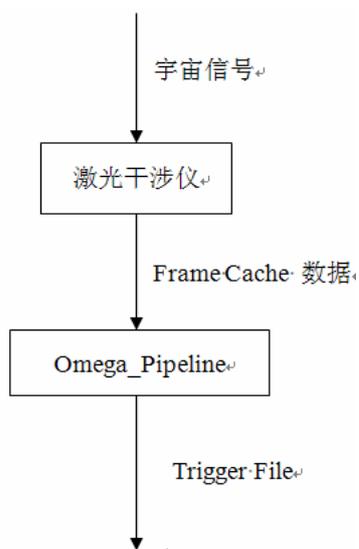


图3.1 LIGO信息流示意图

其中，Omega_Pipeline 主要分析 Frame Cache 数据，得到 Trigger File。最初 LIGO 的后期数据处理系统很多，最重要的是 Q-Pipeline 和 X-Pipeline，经过多年的实际应用检测，最终淘汰了其他系统，将 Q-Pipeline 和 X-Pipeline 合并成 Omega_Pipeline。

到 1695 版本为止，Omega_Pipeline 共有 .m 函数 53 个，其中有些函数已经被更新后的函数所替代，但是仍然被保留在 Omega_Pipeline 中，事实上，在 Omega_Pipeline 中只有 40 个函数被实际调用。如下表：

表3.1 Omega_Pipeline中被调用的函数

Contents.m	loadframecache.m	readframedata.m
wbaseline.m	wblock.m	wcluster.m
wcoherentclusteranalysis.m	wcoincide.m	wcoincidecluster.m

续表 3.1 Omega_Pipeline 中被调用的函数

wcondition.m	wconvertskycoordinates.m	wcopyevents.m
wdetectors.m	wdistance.m	wevent.m
weventgram.m	wfollowup.m	whybridskyplot.m
wifft.m	wmat2cell.m	wmeasure.m
wparameters.m	wposteriors.m	wprintfig.m
wproperties.m	wreaddata.m	wresample.m
wresponse.m	wscan.m	wsearch.m
wselect.m	wspectrogram.m	wthreshold.m
wtile.m	wtimeseries.m	wtransform.m
wtransformandthreshold.m	wveto.m	wwriteskymap.m
wwritetriggers.m		

表3.2 Omega_Pipeline中没被调用的函数

bayesian.cpp	ComputeAntennaResponse.m	converttodpf.m
exp_double.hpp	followup.hpp	functors.hpp
gpstogmst.m	LoadDetectorData.m	qinject.m
readinjectionfile.m	sosfiltfilt.m	SRD.m
tildedelimstr2numorcell.m	vector.hpp	wcoherentanalysis.m
wfft.m	winject.m	wmodelselect.cpp
wposteriors.cpp	wsimulatedetectornoise.m	wskymap.m
wtilesky.m	xmakewaveform.m	xoptimalsnr.m
xspectrogram.m	xtile.m	

其中在所有 40 个被调用的函数中,有 5 个函数是顶层函数,即 Omega_Pipeline 的命令直接调用它们,它们不被其他函数调用,如下表:

表3.3 Omega_Pipeline中的顶层函数

wsearch	wevent
wscan	wfollowup
wproperties	

最后,对 Omega_Pipeline 中的背景细节做简单的说明:

(1)干涉仪有很多传感器,没一个传感器都被称作 channel。

(2)干涉仪测量出的原始数据叫做 `frame data`。

(3)一个 `frame` 的数据为所有 `channel` 数据在同一时间的集合，类似一个照片是一个 `frame`，每一个像素是一个 `channel`。

(4)一段时间的 `frame` 数据的集合，可以称作 `segment`，储存在 `frame cache` 中。

(5)整个分析的时间段叫做：`segment`；而这个 `segment` 又被分成了多个 `block`。

(6)传感器本身的参数为 `detector data & detector state`，而硬件模拟数据为 `injection data`。

`Omega_Pipeline` 主要有三个功能模块，由三个命令完成，下面分别作介绍。

3.2 Omega Search

`Omega Search` 是 `Omega_Pipeline` 最重要的功能，它的将输入的数据分析，得到 `Trigger File`。它直接调用 `search` 函数。

3.2.1 作用

运用离散 `Q` 变换，从干涉引力波探测器的探测数据中，寻找统计意义上比较重要的瞬时事件。其中，在 `Q` 变换中会得到一个 `Z` 值，根据这个值就可以得到“统计上的重要性”。

3.2.2 命令格式

在 Linux 中，`Omega Search` 行命令的格式为：

```
wpipeline search [options] startTime stopTime
```

options:

```
-p|--parameters FILE
```

```
-f|--framecache FILE
```

```
-o|--outdir DIR
```

3.2.3 search 函数形式及输入变量

函数形式为：

```
wsearch(startTime, stopTime, parameterFile, frameCacheFile, outputDirectory,  
debugLevel)
```

其中输入变量为：

startTime: 分析的起始时间, GPS 时间

stopTime: 分析的终止时间, GPS 时间

parameterFile: 包含设定 search 所有参数的参数文件

frameCacheFile: 给出 Frame Cache 数据的存储绝对路径

outputDirectory: 输出结果的地址

debugLevel: 调试错误输出等级, 该值越高, 在调试的过程中输出的信息就越多

3.2.4 特殊情况说明

- 1) 如果输入的“终止时间”早于“起始时间”, 那么系统默认 起始时间=输入终止时间, 终止时间=输入起始时间。
- 2) 如果两个输入时间非整数, 那么系统自动用最近整数代替输入的非整数。
- 3) 如果没有指定输出路径, 则系统将结果输出至当前目录的子目录下, 并命名为:

segments/

<startTime>-<stopTime>/

 livetime.txt

 <channelName1>.txt

 <channelName2>.txt

- 4) 如果没有指定“parameter file”或者“frame cache file”, 则系统自动在当前目录下寻找 parameters.txt 或者 framecache.txt, 并将此作为以上两输入文件。

3.2.5 函数流程

- 1) start analysis timer
- 2) write header
- 3) parse command line arguments
 分析参数, 看是否正确、合乎语法
- 4) read parameters
- 5) initialize random number generators
- 6) partition segment
- 7) create results directory
- 8) check for analyzed blocks
- 9) read frame file cache

- 10) begin block loop
- 11) transform sky coordinate
用来将天空中的坐标转化为以地球为中心的坐标
- 12) block analysis
用来分析当前 block 的情况，得到一些数据，为了下一步 catch error 做准备
- 13) write livetime
- 14) end block loop
(10-14 为一循环)
- 15) write footer
- 16) return

3.2.6 wesarch 调用关系图

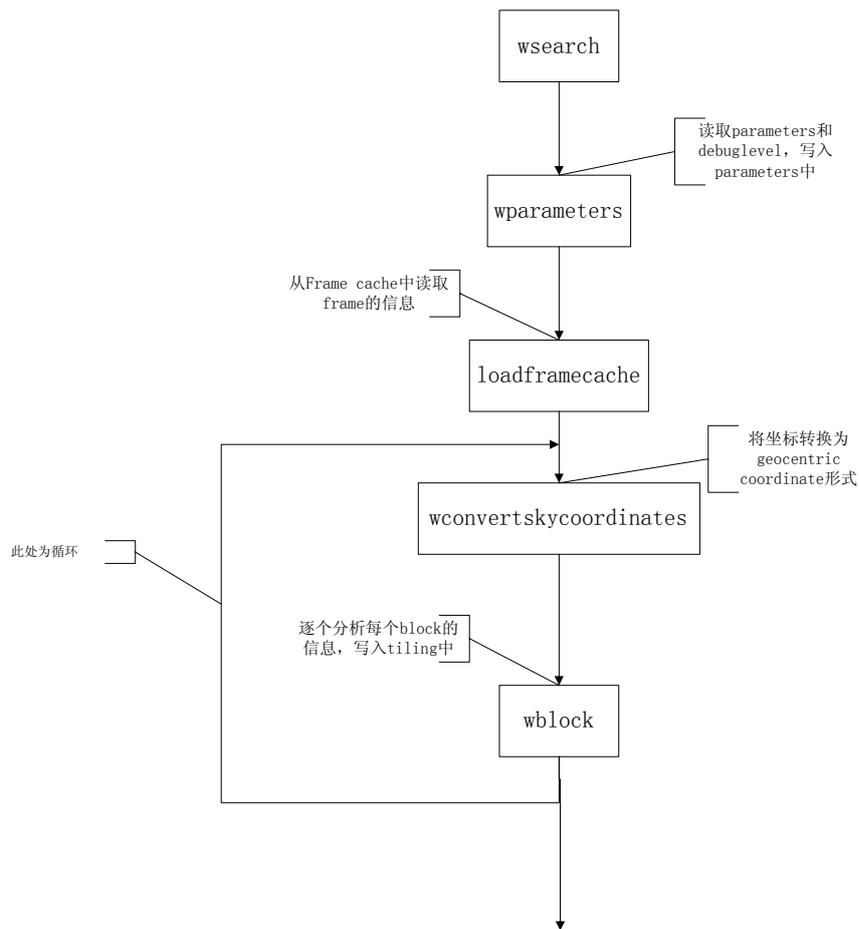


图3.2 wesarch的调用关系图

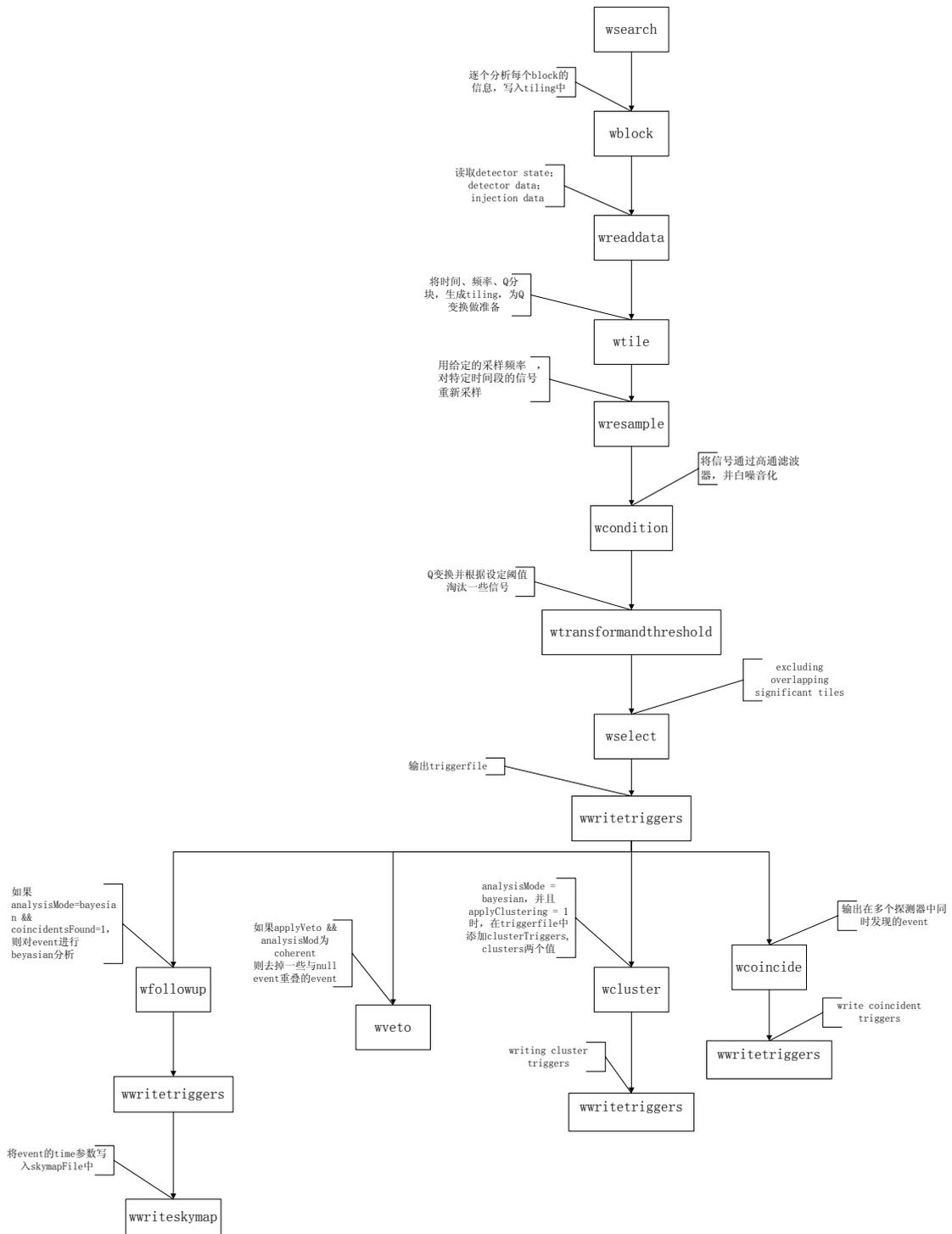


图3.3 wblock的调用关系图

3.3 Omega Scan

Omega Scan 是对某一段感兴趣的数据进行分析的工具，它能够以不同参量为横坐标显示多种信息。

3.3.1 命令格式

wpipeline scan eventTime [options]

options:

- c|--configuration FILE
- f|--framecache FILE
- o|--outdir DIR
- t|--tempdir DIR
- d|--debug LEVEL
- r|--report

3.3.2 scan 函数形式及输入变量

函数形式:

wscan(eventTime, configurationFile, frameCacheFile, outputDirectory, generateReport, debugLevel)

输入变量:

eventTime	GPS time of candidate event
configurationFile	path name of channel configuration file
frameCacheFile	path name of frame file cache file
outputDirectory	path name of directory to write results
generateReport	generate plots and html report
debugLevel	verboseness of debug level output

3.3.3 函数流程

- 1) defaults
- 2) hard coded parameters
- 3) process command line arguments
- 4) write log file header information
- 5) read configuration file

- 6) load frame cache file
- 7) create output directory
- 8) initialize text summary report
- 9) initialize xml summary report
- 10) initialize html report
- 11) add index to html report
- 12) initialize figure handle
- 13) **loop** over **configuration channels**
- 14) add section to html report
- 15) identify statistically significant channels
- 16) analyze statistically significant channels
- 17) add channel to summary report
- 18) add channel to html report
- 19) plot raw time series
- 20) plot high pass filtered time series
- 21) plot whitened time series
- 22) plot raw spectrogram
- 23) plot whitened spectrogram
- 24) plot autoscaled spectrogram
- 25) plot raw eventgram
- 26) plot whitened eventgram
- 27) plot autoscaled eventgram
- 28) add images to html report
- 29) **end loop** over **time ranges**
- 30) **end loop** over **configuration channels**
- 31) close html report
- 32) close text summary report
- 33) close xml summary report
- 34) exit

3.4 Omega event

Omega Event 对某一段感兴趣的数据进行分析，得到比 Omega Search 更详实的数据，包括 trigger file、图片、html 格式报告、

3.4.1 命令格式

wpipeline event [options] centerTime duration

options:

-p|--parameters FILE

-f|--framecache FILE

-o|--outdir DIR

3.4.2 event 函数形式及输入

函数形式:

wevent(centerTime/ startTime, duration/ stopTime, parameterFile, frameCacheFile, outputDirectory, debugLevel);

输入参数:

centerTime|startTime gps center or start time

duration|stopTime gps duration or stop time

parameterFile parameter file

frameCacheFile readframedata formatted frame cache file

outputDirectory directory to write results

debugLevel verbosity level of debug output

3.4.3 函数流程

- 1) start analysis timer
- 2) write header
- 3) parse command line arguments
- 4) read parameters
- 5) initialize random number generators
- 6) determine times and report
- 7) output directory
- 8) read frame file cache

- 9) block analysis
- 10) generate report with plots
- 11) setup figure properties
- 12) produce bayesian skymap and event info
- 13) produce spectrograms
- 14) produce thresholded eventgrams
- 15) produce downselected eventgrams
- 16) produce vetoed eventgrams
- 17) produce cluster eventgrams
- 18) produce coincident eventgrams
- 19) close html report
- 20) end generate report
- 21) return

3.4.4 wevent 的调用关系图

在图片中，从上到下，所有函数的关系是被调用的顺序，上方的函数先被调用，同一平面的函数同时被调用，或依据条件被调用。

调用关系如图 3.4:

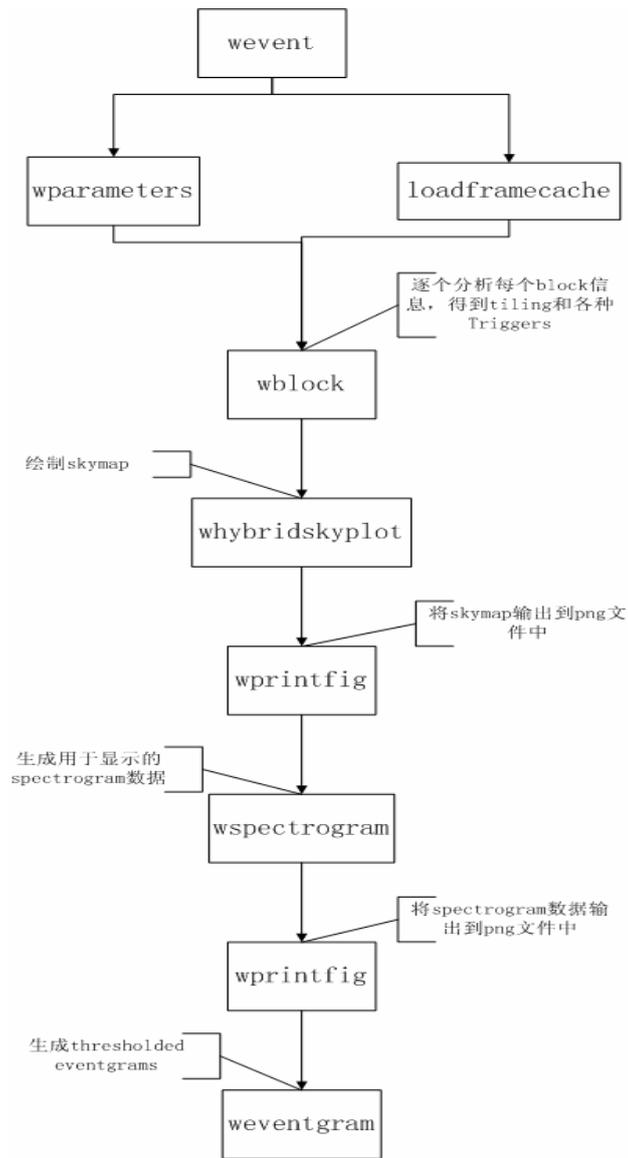


图3.4 wevent的调用关系图

3.5 重要参数的结构

Omega_Pipeline 中的很多输入输出参数都是结构体形式的变量，有些参数是包含默认值的，下面做简单介绍

parameters: 设定 Omega_Pipeline 中所有参数的结构体变量。

带有默认值的参数：

表3.4 parameters中带默认值的变量

名称	默认值	名称	默认值
analysisMode	'independent'	highPassCutoff:	(determined from tiling)
sampleFrequency	4096	lowPassCutoff:	(determined from tiling)
qRange	[sqrt(11)100]	whiteningDuration:	(determined from tiling)
frequencyRange	[48 Inf]	doubleWhiten:	1
maximumMismatch	0.2	extraBlockOverlap:	0
falseEventRate	1	outlierFactor:	2.0
blockDuration	64(seconds)	maximumSignificants:	1e5
conditionDuration	(value of blockDuration)	maximumTriggers:	1e3
timeShifts	0	durationInflation:	1.0
injectionNames	'NONE'	bandwidthInflation:	1.0
injectionTypes	'NONE'	triggerFields:	(depends on analysis mode and clustering)
injectionFactors	0	triggerFormat:	'txt'
injectionTimeShifts	0	randomSeed:	sum(1e6 * clock)

传感器状态参数：

表3.5 parameters中传感器的变量

stateNames:	stateTypes:
stateMasks:	

有关 clustering 的参数：

表3.6 parameters中有关clustering的变量

名称	默认值	作用
applyClustering:	0	
clusterMethod:	'density'	
clusterRadius:	4.0	(for density clustering)
clusterDensity:	3.0	(for density clustering)
clusterSingles:	1	(for density clustering)
clusterLinkage:	'single'	(for density clustering)
clusterCriterion:	'distance'	(for density clustering)
clusterThreshold:	4.0	(for density clustering)
distanceMetric:	'integratedMismatch'	
writeClusters:	0	

参数 analysisMode 为 independent 时，需要的参数：

表3.7 parameters中当参数analysisMode为independent时，需要的参数

名称	默认值
coincidenceNumber:	0
maximumCoincidents:	Inf

参数 analysisMode 为 coherent 时，需要的参数：

表3.8 parameters中当参数analysisMode为coherent时，需要的参数

名称	默认值
skyPosition:	[]
skyCoordinateSystem:	'equatorial'
applyVeto:	1
falseVetoRate:	0.0
uncertaintyFactor:	0.0
correlationFactor:	0.0
vetoDurationFactor:	0.5
vetoBandwidthFactor:	0.5
maximumConsistents:	1e3

当参数 analysisMode 为 bayesian 时，需要的参数：

表3.9 parameters中当参数analysisMode为bayesian时，需要的参数

名称	默认值
xCoherentCheck	false

另外还有三个参数：

表3.10 parameters中另外三个参数

numberOfChannels	numberOfSites
injectionChannels	

tiling: Q 变换的结果结构体

tiling 的构成：

表3.11 tiling的结构

名称	作用
id	identification string for structure
duration	duration of data under analysis
minimumQ	minimum Q of search
maximumQ	maximum Q of search
minimumFrequency	minimum frequency of search
maximumFrequency	maximum frequency of search
sampleFrequency	sample frequency of the data under analysis
maximumMismatch	maximum fractional energy loss due to signal mismatch
numberOfPlanes	number of Q planes in analysis
qs	vector of Qs
planes	cell array of plane structures
numberOfTiles	total number of tiles in analysis
numberOfIndependents	total number of statistically independent tiles
numberOfFlops	total number of flops in analysis
highPassCutoff	cutoff frequency for high pass filter
lowPassCutoff	cutoff frequency for low pass filter

whiteningDuration	duration of whitening filter
transientDuration	duration of filter transients to suppress

其中上面黑体的 planes 由下面参数构成：

表3.12 tiling中planes的结构

名称	作用
q	Q of plane
minimumFrequency	Q dependent minimum frequency of search
maximumFrequency	Q dependent maximum frequency of search
normalization	Q dependent normalization factor
frequencies	vector of frequencies
numberOfRows	number of frequency rows in plane
rows	cell array of row structures
numberOfTiles	number of tiles in plane
numberOfIndependents	number of statistically independent tiles in plane
numberOfFlops	number of flops to compute plane

其中上面黑体的 rows 由下面参数构成：

表3.13 planes中rows的结构

名称	作用
frequency	frequency of row
duration	tile duration for coincidence testing
bandwidth	tile bandwidth for coincidence testing
timeStep	tile time step for integration
frequencyStep	tile frequency step for integration
times	vector of times

events: 感兴趣的事件

events 的结构：

表3.14 events的结构

名称	作用
time	center time of tile [gps seconds]
frequency	center frequency of tile [Hz]

duration	duration of tile [seconds]
bandwidth	bandwidth of tile [Hz]
normalizedEnergy	normalized energy of tile []
overflowFlag	boolean overflow flag

第4章 Omega Wsearch 并行化

Omega Wsearch 是整个系统中最重要也是需要时间最多的功能, 本文介绍将它做并行化改进。

4.1 Wsearch 运行实例

wsearch 有三个重要参数:

- 1) 起止时间(startTime, stopTime)
- 2) 运行模式(analysisMode)
- 3) 块长度 (blockDuration)

下面, 以 0 到 200 秒, 运行模式为 “independent”, 每块长为 32 秒为例, 运行 wsearch。

运行命令:

```
[globus@kunlun ~]$ /home/globus/omega-binary/bin/wpipeline search 0 200 -p
/home/globus/omega/parameters.txt -f /home/globus/omega/framecache.txt
```

运行日志文件:

共有 9 个 block, 此处只保留 1 个 block 做例子。

Omega Search analysis

Run by globus on 2009-06-11 at 20:56:02

parsing command line arguments

```
startTime:          0.000000000
stopTime:           200.000000000
parameterFile:      /home/globus/omega/parameters.txt
frameCacheFile:     /home/globus/omega/framecache.txt
outputDirectory:   segments/0000000000-0000000200
debugLevel:         1
```

reading parameter file

```
channelNames:       { 'H1:ONLINE-STRAIN', 'L1:ONLINE-STRAIN',
'V1:ONLINE-STRAIN' }
frameTypes:         { 'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
'V1_ONLINE_TEST_1' }
timeShifts:         [+0 +0 +0]
stateNames:         { 'H1:ONLINE-STATE_VECTOR', 'L1:ONLINE-STATE_VECTOR',
'V1:ONLINE-STATE_VECTOR' }
stateTypes:         { 'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
```

```

'V1_ONLINE_TEST_1'}
  stateMasks:          [4 4 1]
  sampleFrequency:     4096
  blockDuration:       32
  extraBlockOverlap:   0
  doubleWhiten:        1
  qRange:              [sqrt(11) sqrt(2)*100]
  frequencyRange:      [48 Inf]
  maximumMismatch:     0.2
  outlierFactor:       2.0
  falseEventRate:     1e0
  maximumSignificants: 1e5
  maximumTriggers:     1e3
  durationInflation:   1.0
  bandwidthInflation:  1.0
  maximumCoincidents:  Inf
portioning segment
  segment duration:    200.00 seconds
  time shift loss:     0.00 seconds
  block duration:      32.00 seconds
  block overlap:       11.00 seconds
  number of blocks:    9
identifying previously analyzed blocks
  analyzed blocks:     0 blocks
reading frame cache
analyzing block 1 of 9 (0.000000000 - 32.000000000)
  reading detector state
  reading detector data
  tiling search space
  resampling data
  conditioning data
  transforming and thresholding data
    H1:ONLINE-STRAIN:  188 tiles
    L1:ONLINE-STRAIN:  481 tiles
    V1:ONLINE-STRAIN:  563 tiles
downselecting triggers
  H1:ONLINE-STRAIN:    52 tiles
  L1:ONLINE-STRAIN:    73 tiles
  V1:ONLINE-STRAIN:    88 tiles
writing downselected triggers
writing livetime

```

```
block complete
    elapsed time:          18 seconds
segment complete
    elapsed time:          130 seconds
```

运行结果:

共有三个 Trigger File, 此处只选择一个的前一部分做例子:

```
% time
% frequency
% duration
% bandwidth
% normalizedEnergy
0000000008.988281250 1.748e+03 4.778e-03 2.093e+02 1.392e+01
0000000007.839843750 9.151e+02 4.883e-03 2.048e+02 1.391e+01
0000000023.507812500 6.588e+02 4.429e-02 2.258e+01 1.358e+01
0000000025.625000000 1.013e+02 8.247e-02 1.213e+01 1.354e+01
0000000023.699218750 1.823e+03 1.601e-02 6.247e+01 1.340e+01
0000000011.703125000 8.148e+02 1.916e-02 5.219e+01 1.310e+01
0000000018.593750000 1.398e+02 3.196e-02 3.129e+01 1.304e+01
0000000012.964843750 1.620e+03 9.639e-03 1.037e+02 1.254e+01
0000000024.531250000 1.591e+02 2.808e-02 3.561e+01 1.251e+01
0000000021.283203125 1.879e+03 8.308e-03 1.204e+02 1.243e+01
0000000007.339843750 1.440e+03 3.103e-03 3.223e+02 1.234e+01
0000000020.658203125 6.843e+02 1.221e-02 8.193e+01 1.214e+01
0000000019.640625000 1.011e+02 4.419e-02 2.263e+01 1.206e+01
0000000014.672851562 1.063e+03 1.203e-03 8.310e+02 1.205e+01
0000000008.570312500 1.118e+03 2.610e-02 3.831e+01 1.195e+01
0000000009.864257812 2.383e+02 5.368e-03 1.863e+02 1.189e+01
0000000022.863281250 9.995e+02 1.562e-02 6.402e+01 1.171e+01
0000000027.562500000 3.950e+02 3.953e-02 2.530e+01 1.163e+01
0000000014.439453125 1.235e+03 6.762e-03 1.479e+02 1.158e+01
0000000026.628906250 1.312e+03 2.225e-02 4.495e+01 1.156e+01
0000000026.968750000 8.615e+02 1.812e-02 5.518e+01 1.155e+01
0000000020.773437500 1.810e+03 4.615e-03 2.167e+02 1.155e+01
0000000012.085937500 1.064e+03 2.743e-02 3.645e+01 1.147e+01
0000000027.062500000 1.914e+03 8.155e-03 1.226e+02 1.138e+01
0000000013.094726562 1.631e+03 5.122e-03 1.953e+02 1.131e+01
```

4.2 blockDuration 与 wsearch 运行时间

下面以如下参数的运行环境为基础，调整 blockDuration，得到不同 block 长度下的分析时间长度。

表4.1 blockDuration与wsearch运行时间关系

blockDuration	segment elapsed time
16	347
32	196
64	157
128	187
256	347

图象如下

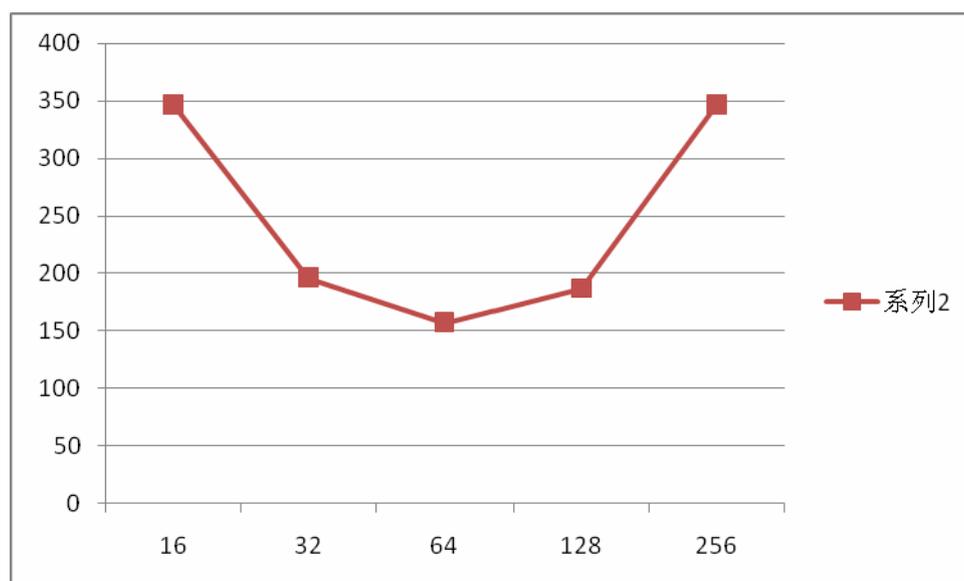


图4.1 blockDuration与wsearch运行时间关系

可以看出，当 blockDuration 和 segment duration 满足如下关系时，segment elapsed time 有最小值。

$$\frac{\log_2(\text{segment duration}) - 4}{\log_2(\text{blockDuration}) - 4} \approx 2$$

(4-1)

即：

$$blockDuration^2 \approx 16segment\ duration \quad (4-2)$$

注意：在 Omega Wsearch 中，blockDuration 的值只能为 2 的整数次方，否则运行会出错。

4.3 基于 Globus 平台的并行化

通过 Globus 平台，我们可以将计算任务交给另外一台电脑完成，基于这个思想，我们将分析时间平分成两半，并且交给两台电脑完成，于是就实现了对 Omega_Pipeline 的并行化。

4.3.1 并行化程序

我们在两台电脑上完成并行化程序，它们的信息如表 4.2：

表4.2 并行化电脑信息

名称	域名	作用
kunlun	166.111.137.44	主机
zhihui	166.137.111.86	僚机

为 kunlun 编写的 Shell 程序为 A.sh，zhihui 的 Shell 程序为 B.sh。程序如下：

4.3.2 程序流程

流程图如图 4.2：

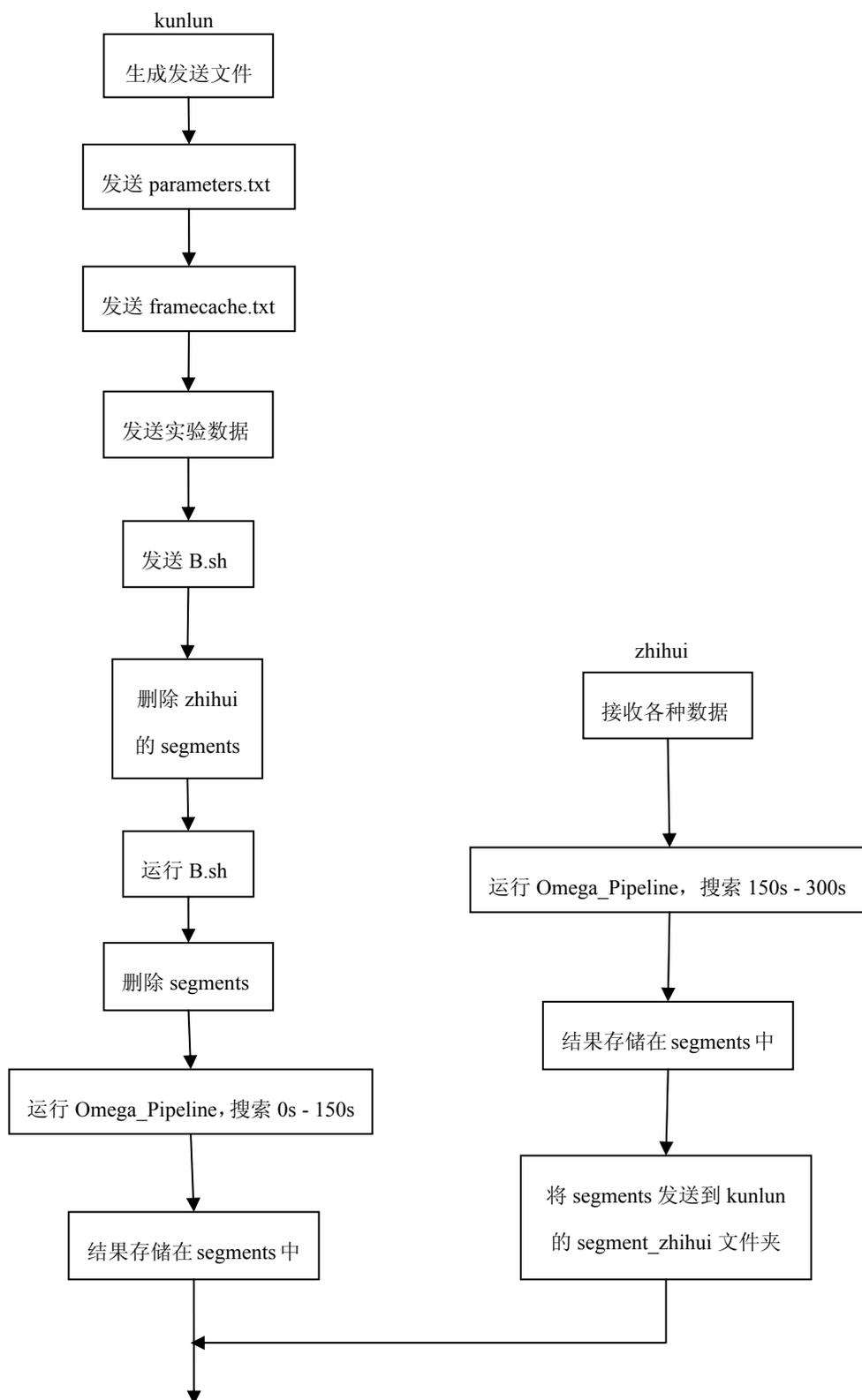


图4.2 并行化程序流程

4.3.3 运行结果

```
[globus@kunlun ~]$ /home/globus/Desktop/A.sh
removing kunlun's datasend.txt
making datasend.txt
kunlun's globus setup
removing zhihui's parameters.txt and framecache.txt
sending parameters.txt and framecache.txt to zhihui
removing zhihui's data_test_s6vsr2 folder
creating zhihui's new data_test_s6vsr2 folder
sending data_test_s6vsr2 folder to zhihui
removing zhihui's B.sh
sending B.sh to zhihui
add execute permission to B.sh
removing zhihui's sengments folder
removing kunlun's segments_zhihui folder
creating kunlun's segments_zhihui folder
run zhihui's B.sh
run zhihui's Omega_Pipeline
Warning: No display specified. You will not be able to display graphics on the screen.
Omega Search analysis
Run by on 2009-06-14 at 17:41:17
parsing command line arguments
  startTime:          150.00000000
  stopTime:           300.00000000
  parameterFile:      /home/globus/omega/parameters.txt
  frameCacheFile:     /home/globus/omega/framecache.txt
  outputDirectory:    segments/0000000150-0000000300
  debugLevel:         1
reading parameter file
  channelNames:       {'H1:ONLINE-STRAIN', 'L1:ONLINE-STRAIN',
'V1:ONLINE-STRAIN'}
  frameTypes:         {'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
'V1_ONLINE_TEST_1'}
  timeShifts:         [+0 +0 +0]
  stateNames:         {'H1:ONLINE-STATE_VECTOR', 'L1:ONLINE-STATE_VECTOR',
'V1:ONLINE-STATE_VECTOR'}
  stateTypes:         {'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
'V1_ONLINE_TEST_1'}
```

```

stateMasks:          [4 4 1]
sampleFrequency:     4096
blockDuration:       64
extraBlockOverlap:   0
doubleWhiten:        1
qRange:              [sqrt(11) sqrt(2)*100]
frequencyRange:      [48 Inf]
maximumMismatch:     0.2
outlierFactor:       2.0
falseEventRate:      1e0
maximumSignificants: 1e5
maximumTriggers:     1e3
durationInflation:   1.0
bandwidthInflation:  1.0
maximumCoincidents:  Inf
portioning segment
  segment duration:   150.00 seconds
  time shift loss:    0.00 seconds
  block duration:     64.00 seconds
  block overlap:      21.00 seconds
  number of blocks:   3
identifying previously analyzed blocks
  analyzed blocks:    0 blocks
reading frame cache
analyzing block 1 of 3 (150.000000000 - 214.000000000)
analyzing block 2 of 3 (193.000000000 - 257.000000000)
analyzing block 3 of 3 (236.000000000 - 300.000000000)
segment complete
  elapsed time:       71 seconds
removing's kunlun's segments folder
run kunlun's Omega_Pipeline
Omega Search analysis
Run by globus on 2009-06-14 at 17:42:51
parsing command line arguments
  startTime:          0.000000000
  stopTime:           150.000000000
  parameterFile:      /home/globus/omega/parameters.txt
  frameCacheFile:    /home/globus/omega/framecache.txt
  outputDirectory:   segments/0000000000-0000000150
  debugLevel:         1
reading parameter file

```

```

channelNames:          { 'H1:ONLINE-STRAIN', 'L1:ONLINE-STRAIN',
'V1:ONLINE-STRAIN' }
frameTypes:           { 'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
'V1_ONLINE_TEST_1' }
timeShifts:           [+0 +0 +0]
stateNames:           { 'H1:ONLINE-STATE_VECTOR', 'L1:ONLINE-STATE_VECTOR',
'V1:ONLINE-STATE_VECTOR' }
stateTypes:           { 'H1_ONLINE_TEST_1', 'L1_ONLINE_TEST_1',
'V1_ONLINE_TEST_1' }
stateMasks:           [4 4 1]
sampleFrequency:      4096
blockDuration:        64
extraBlockOverlap:    0
doubleWhiten:         1
qRange:               [sqrt(11) sqrt(2)*100]
frequencyRange:       [48 Inf]
maximumMismatch:      0.2
outlierFactor:        2.0
falseEventRate:       1e0
maximumSignificants:  1e5
maximumTriggers:      1e3
durationInflation:    1.0
bandwidthInflation:   1.0
maximumCoincidents:   Inf
portioning segment
  segment duration:    150.00 seconds
  time shift loss:     0.00 seconds
  block duration:      64.00 seconds
  block overlap:       21.00 seconds
  number of blocks:    3
identifying previously analyzed blocks
  analyzed blocks:     0 blocks
reading frame cache
analyzing block 1 of 3 (0.000000000 - 64.000000000)
analyzing block 2 of 3 (43.000000000 - 107.000000000)
analyzing block 3 of 3 (86.000000000 - 150.000000000)
segment complete
  elapsed time:        88 seconds

```

4.4 与单机程序对比

在实际应用中，不需要每次并行化运行 Omega_Pipeline 时，都将实验数据重新传一遍，因此，以下实验取消传 data_test_s6vsr2 数据和 framecache.txt 文件环节，但是由于运行参数可能需要改变，因此每次仍然传 parameters.txt。

取 0-500 秒，并行化时，两台计算机有不同的运行时间，我们取其中的最大值作为并行化 Omega_Pipeline 运行时间。

表4.3 比较结果

blockDuration (s)	单机 (s)	并行化 (s)	比例
16	568	302	0.53
32	301	151	0.50
64	235	136	0.58
128	268	192	0.72

第5章 结论及展望

5.1 并行化优化的结论

通过阅读大量文献和 `Omega_Pipeline` 代码，在这次毕业设计中，我清楚了引力波探测需要的数学方法以及 `Omega_Pipeline` 的程序细节。

从第二章和第三章的调研结果上来看，在整个 `Omega_Pipeline` 中，耗时最多当属对空间的分块、Q 变换两个部分，在程序中，这两部分属于 `wtile.m` 和 `wtransformandthreshold.m`。

通过运行 `Omega_Pipeline`，测试不同参数对程序执行时间的影响，我们发现程序的运行时间和 `blockDuration` 直接相关。经过多次实验，我们发现了式 4.2.2 所描述的最快 `blockDuration`，

因此，在追求最快程序执行速度的目标下，我们又将 `blockDuration` 设定为最优值，并且将 `segment Duration` 平分为两段，分别交给两台计算机并行化执行，这样程序执行速度提高近一倍左右。

5.2 展望

本次毕设实现了在 `Globus` 平台下的 `Omega_Pipeline` 运行，提高了程序的执行速度，但是我认为以下两方面还有提高空间：

(1)`Globus` 平台可以实现并行化，但是仍有诸多限制，使用起来不是很方便，而且 `Globus` 每执行一条远程命令就需要进行一次安全认证，使实际时间消耗很大，以后的并行化程序尽量减少远程命令，增加可本地执行的命令，这样可以进一步减少时间消耗。

(2)将并行化程序扩展到三台以上的电脑上，并增加运行策略。

(3)事实上，`wtile.m` 和 `wtransformandthreshold.m` 中存在大量循环，可以考虑对它们在多核电脑上并行化，这样可以避免 `Globus` 安全认证的时间，并与现代 CPU 发展方向同步。

插图索引

图 1.1	网格系统的基本功能模块示意图	3
图 1.2	网格的五层沙漏模型	5
图 1.3	Globus 协议的五层沙漏结构	7
图 1.4	五层沙漏结构与 TCP/IP 协议对比	9
图 3.1	LIGO 信息流示意图	33
图 3.2	wsearch 的调用关系图	37
图 3.3	wblock 的调用关系图	38
图 3.4	wevent 的调用关系图	43
图 4.1	blockDuration 与 wsearch 运行时间关系	52
图 4.2	并行化程序流程	54

表格索引

表 3.1	Omega_Pipeline 中被调用的函数.....	33
表 3.2	Omega_Pipeline 中没被调用的函数.....	34
表 3.3	Omega_Pipeline 中的顶层函数.....	34
表 3.4	parameters 中带默认值的变量.....	44
表 3.5	parameters 中传感器的变量.....	44
表 3.6	parameters 中有关 clustering 的变量.....	45
表 3.7	parameters 中当参数 analysisMode 为 independent 时, 需要的参数	45
表 3.8	parameters 中当参数 analysisMode 为 coherent 时, 需要的参数	45
表 3.9	parameters 中当参数 analysisMode 为 bayesian 时, 需要的参数	46
表 3.10	parameters 中另外三个参数.....	46
表 3.11	tiling 的结构.....	46
表 3.12	tiling 中 planes 的结构.....	47
表 3.13	planes 中 rows 的结构.....	47
表 3.14	events 的结构.....	47
表 4.1	blockDuration 与 wsearch 运行时间关系.....	52
表 4.2	并行化电脑信息	53
表 4.3	比较结果	58

参考文献

- [1] LIGO - Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory <http://www.ligo.caltech.edu>
- [2] LSC – LIGO Scientific Collaboration. <http://www.ligo.org>
- [3] Omega Pipeline - <https://geco.phys.columbia.edu/omega>
- [4] Cisco 网络技术:技术专题:网格计算 [EB/OL] . [2004-5-24].
http://www.net130.com/CMS/Pub/special/special_grid/0810.htm
- [5] 中国教育网络 – [2008-08-19]
http://www.edu.cn/zhong_dian_ke_ti_5168/20061205/t20061205_208169.shtml
- [6] 都志辉. 网格计算 [M]. 第一版. 北京:清华大学出版社,2002:7-12
- [7] Globus Alliance. About the Globus Toolkit [EB/OL].
<http://www.Globus.org/toolkit/about.html>
- [8] Bart Jacob. Enabling Applications for Grid Computing with Globus [M]. 1st ed. USA: International Business Machines Corporation,2003:33-34
- [9] Luis Ferreira. Introduction to Grid Computing with Globus [M]. 2nd ed. USA: International Business Machines Corporation,2003:156-159
- [10] 中国网格信息中转站. 网格技术可实现计算资源共享 [EB/OL] . [2005-6-23].
<http://www.chinagrid.net/dvnews/show.aspx?id=1197&cid=23>
- [11] Matt Haynos. 网格观点: 网格计算——下一代分布式计算 [EB/OL] . [2006-7-20].
<http://www.ibm.com/developerworks/cn/grid/gr-heritage/>
- [12] Bart Jacob. Introduction to Grid Computing [M]. 1st ed. USA: International Business Machines Corporation,2005:19-20
- [13] Jean-Pierre Goux, Sanjeev Kulkarni, Jeff Linderroth, Michael Yoder. An Enabling Framework for Master-Worker Applications on the Computational Grid [J]. High-Performance Distributed Computing: The Ninth International Symposium, 2000: 43-50
- [14] Shourov Keith Chatterji. The search for gravitational wave bursts in data from the second LIGO science run [D]. Massachusetts Institute of Technology ,1995.

致 谢

首先，要感谢我的导师，尊敬的曹军威副研究员。他平时不仅对我的毕业设计多有关心和指导，在其他方面也对我很关心。另外他严谨的科研作风对我触动也很大，在将来研究生阶段的学习当中，这种严谨的科研作风是我需要不断学习和改进的。

而且，感谢实验室里的李俊伟师兄。李俊伟师兄拥有扎实的科研功底，他的帮助让我在毕设的前期少走了很多的弯路。他精通 Globus，在毕设中指导我搭建 Globus 平台，在关键问题上起到关键帮助作用。

最后，再一次感谢诸位关心和帮助过我的人。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： _____ 日 期： _____

附录 A 外文资料的书面翻译

基于 LIGO 第二次实验数据的引力波搜索

第三章：引力波脉冲探测

通常，我们定义引力波是时域中的波动，而且在时域中它是平方可积的。我们假设引力波是短于一秒的，除此之外，不再作更多的限制。这个定义有效的派出了很多干扰信号，但是仍有一些其它信号不能被排除。

经过以往的研究，我们发现通过时-频能量分布来描述引力波比较方便。本文中主要探测引力波的方法是，创造二维时-频图，它可以识别出时变的包含可能含有引力波的频率信息。

本节中我们给出了定义引力波脉冲振幅的方法，另外还定义了一些参数：中心时间、中心频率、持续时间、带宽，它们可以进一步描述 burst 的结构。以这些参数为基础，我们描述 burst 的方法是将其投影到一些函数基上。由于函数基与原数据是有一定的差异的，因此我们定义了一种算法，使得通过函数基逼近的引力波脉冲有最小的时-频不确定度。

本文后部分章节中，给出了衡量探测器噪声的方法，并藉此给出信号可检测程度的算法。

A-3.1 特征振幅

引力波脉冲的时域表达式和频域表达时可以形成一对傅立叶变换对：

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(f) e^{+i2\pi ft} df \quad \text{A-1}$$

$$\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad \text{A-2}$$

由于前文已经叙述引力波脉冲在时域中是平方可积的，通过帕萨瓦尔方程，我们可以定义引力波脉冲的特征振幅。

$$\|h\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(f)|^2 df. \quad \text{A-3}$$

A-3.2 归一化引力波方程

引力波脉冲可以描述成特征振幅和一个归一化表达式的乘积，如下所示：

$$h(t) = \|h\| \psi(t) \quad \text{A-4}$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \tilde{\psi}(f). \quad \text{A-5}$$

类似地，两个归一化表达式也构成一对傅立叶变换：

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(f) e^{+i2\pi ft} df \quad \text{A-6}$$

$$\tilde{\psi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad \text{A-7}$$

而且它们的平方积分为 1。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(f)|^2 df = 1 \quad \text{A-8}$$

A-3.3 时-频参数化

将归一化波动的平方看作概率密度函数，则可定义中心时间、中心频率。

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt \\ \phi &= 2 \int_0^{+\infty} f |\tilde{\psi}(f)|^2 df. \end{aligned} \quad \text{A-10}$$

类似地，我们可以定义延续时间、带宽。我们在这里给出平方形式。

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau)^2 |\psi(t)|^2 dt \quad \text{A-11}$$

$$\sigma_f^2 = 2 \int_0^{+\infty} (f - \phi)^2 |\tilde{\psi}(f)|^2 df \quad \text{A-12}$$

最后我们定义 Q 参数，它是中心频率和带宽的比值。

$$Q = \frac{\phi}{\sigma_f}. \quad \text{A-13}$$

A-3.4 局部引力波脉冲

当 burst 不包括频率为零的成分时，式 A-11、A-12 中所描述的延续时间和带宽满足不确定性关系方程。

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad \text{A-14}$$

因此一个引力波不能在一个小于不确定性关系方程的时-频区域内显示它的结构。因此我们定义如果一个引力波的时-频区域近似不确定性关系方程的约束时，则我们说这个引力波被很好的局部化了。

无量纲的参数 Q 是信号在时-频空间里横纵比的衡量，并且和 burst 中震动的次数大致相同。进一步，这个式 A-14 所描述的最小时频区域的引力波的时域和频域是高斯正弦曲线的形式。

$$h(t) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma_t^2} \right] \exp \left[i2\pi\phi(t-\tau) \right] \quad \text{A-15}$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(f-\phi)^2}{4\sigma_f^2} \right] \exp \left[-i2\pi\tau(f-\phi) \right] \quad \text{A-16}$$

由于 $Q < 3$ 时，在前面假设的参数中会出现零点混叠现象，因此我们在实际中只用这种方法研究 $Q > 3$ 的引力波脉冲。如果想要探测 $Q < 3$ 的引力波脉冲，需要依据它在信号空间的投影是否能够达到 $Q > 3$ 。

当 $Q < 3$ 时，式 A-15、A-16 有另外的形式如下。

$$h(t) = \|h\| \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma_t^2} \right] \quad \text{A-17}$$

$$\tilde{h}(f) = \|h\| \left(2\pi\sigma_t^2 \right)^{1/4} \exp \left[-\pi^2\sigma_t^2 f^2 \right] \exp \left[-i2\pi\tau f \right] \quad \text{A-18}$$

A-3.5 非局部引力波脉冲

通过以上局部的时-频空间内将引力波脉冲参数化的方法不能对更复杂的引力波脉冲进行很好的参数化。但是复杂的引力波脉冲在小的时频尺度还是满足不确定性方程 A-14。

因此我们常用的处理方法就是将这种复杂引力波脉冲分成一系列局部引力波脉冲的线性组合。

A-3.6 引力波脉冲的测量

基于我们目前对引力波的认识，可以得出三种正确的测量方向：

- 1 我们已经知道某个方向会出现引力波，比如说某方向出现了超新星爆炸，这时引力波信号的方向明确，而且我们知道它的模型。
- 2 很多个探测器同时测量到的数据
- 3 测量到很少被人知道的波信号

第一种情况，波形被很好的建模时。数据先经过白噪音处理，然后再投影到一些同样也被白噪音处理的天体波形上。这种方法是最优线性滤波器，它最大化了实测数据和噪音的比值。

对于第二种情况，最理想的方法就是将一个探测器的一段信号投影到另一个探测器相应的信号区间上。当两个探测器都探测到引力波脉冲时，该方法的信噪比达到最大。

考虑到这种方法的计算消耗，本方法只应用于对短时间的信号进行细致探测

对于这种很少有人知道的波动形式，我们的做法是将其投影到一些基上，在通过一些诸如聚类的手段逐渐寻找与此波动形式最接近的基。

A-3.7 多分辨率分析

在本分析中，我们着力于寻找一种算法，对地面干涉探测器能够探测到的数据进行分析，寻找引力波脉冲，我们将方程 A-15、A-16 作为我们的基底方程，这样做的理由如下：

1. 引力波的时频区域是由不确定关系方程确定的，通过选择一些最小不确定度的波作为基底，我们可以最大化的解析引力波脉冲的时频结构。
2. 将以上作为基础的测量方法能提供候选事件的最小时频区间界。这有两个好处，第一我们能够确定一些不重叠的、有着最小不确定性的波（它们将候选事件的所有能量集中到了最少数量的基）上的最匹配基。其次，我们能对多个探测器同时探测到的事件进行最严格的测试。

一个多分辨率的时频基一般包括时域内具有短持续时间、Q 小的 delta 函数。因为选择的基底是过完备的，因此基底函数一般不正交。

A-3.8 基底选择

我们有两个目标：

- (一) 希望局部的引力波脉冲能够和一个基底方程比较匹配。
- (二) 希望有较少的基底方程，这样有较少的计算量。

比较幸运的是，在选择基底时，我们不需要考虑探测器的噪音。而且在实际中，我们搜索的是白化后的数据，而不是原始数据。

为了构造基底，我们首先将方程 A-15 和 A-16 写成归一化形式，A-19 与 A-20。

$$\psi(t; \tau, \phi, Q) = \left(\frac{8\pi\phi^2}{Q^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{4\pi^2\phi^2}{Q^2}(t - \tau)^2 \right] \exp [-i2\pi\phi(t - \tau)] \quad \text{A-19}$$

$$\tilde{\psi}(f; \tau, \phi, Q) = \left(\frac{Q^2}{2\pi\phi^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{Q^2}{4\phi^2}(f - \phi)^2 \right] \exp [-i2\pi\tau(f - \phi)]. \quad \text{A-20}$$

这样做我们就已经考虑到了高斯正弦引力波脉冲的最小不确定性性质，这就要求它们的带宽和持续时间不能随便选择。

事实上，我们只需要考虑三个参数，中心时间 τ ，中心频率 Φ ，质量参数 Q 。本方法就是找到以上三个参数的最优值，使得基底与实际信号的差异造成的能量流失小于一个阈值。

为了得到最终结果，首先我们定义采用基底逼近后的偏差表达式：

$$\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t; \tau, \phi, Q) \psi^*(t; \tau + \delta\tau, \phi + \delta\phi, Q + \delta Q) dt$$

A-21

它的模的平方为：

$$|\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q)|^2 = \frac{2x_\phi x_Q}{x_\phi^2 + x_Q^2} \exp\left(-\frac{8\pi^2 \phi^2 x_\phi^2 \delta\tau^2}{Q^2(x_\phi^2 + x_Q^2)}\right) \exp\left(-\frac{Q^2 x_Q^2 \delta\phi^2}{2\phi^2(x_\phi^2 + x_Q^2)}\right),$$

A-22

接下来，我们可以定义能量损失的微分：

$$\mu(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) = 1 - |\alpha(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q)|^2.$$

A-23

展开式 A-23 到二次无穷小的形式如下：

$$\mu(\delta\tau, \delta\phi, \delta Q) \simeq \frac{4\pi^2 \phi^2}{Q^2} \delta\tau^2 + \frac{2 + Q^2}{4\phi^2} \delta\phi^2 + \frac{1}{2Q^2} \delta Q^2 - \frac{1}{\phi Q} \delta\phi \delta Q.$$

A-24

标准化形式如下：

$$\delta s^2 = g_{\tau\tau} \delta\tau^2 + g_{\phi\phi} \delta\phi^2 + g_{QQ} \delta Q^2 + 2g_{\phi Q} \delta\phi \delta Q.$$

A-25

其中：

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau} &= \frac{4\pi^2 \phi^2}{Q^2} \\ g_{\phi\phi} &= \frac{2 + Q^2}{4\phi^2} \\ g_{QQ} &= \frac{1}{2Q^2} \\ g_{\phi Q} &= -\frac{1}{2\phi Q}. \end{aligned}$$

A-26

进一步，我们可以得到累积偏差的表达式：

$$\begin{aligned}
s_\tau &= \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} g_{\tau\tau}^{1/2} d\tau = \frac{2\pi\phi}{Q}(\tau_{\max} - \tau_{\min}) \\
s_\phi &= \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} g_{\phi\phi}^{1/2} d\phi = \frac{(2+Q^2)^{1/2}}{2} \ln\left(\frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}}\right) \\
s_Q &= \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} g_{QQ}^{1/2} dQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right).
\end{aligned}
\tag{A-27}$$

为了表达清晰，进一步有：

$$\begin{aligned}
N_\tau &= \left\lceil \frac{s_\tau}{\delta s_{\max}} \right\rceil \\
N_\phi &= \left\lceil \frac{s_\phi}{\delta s_{\max}} \right\rceil \\
N_Q &= \left\lceil \frac{s_Q}{\delta s_{\max}} \right\rceil
\end{aligned}
\tag{A-28}$$

最终的结论为：

4. 将时间、频率、Q 三者构成的空间分块，首先选择 Q_s 为：

$$Q_n = Q_{\min} \exp\left[\sqrt{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{s_Q}{N_Q}\right] \quad 1 \leq n \leq N_Q.
\tag{A-29}$$

5. 对每一个 Q，选择频率为：

$$\phi_n = \phi_{\min} \exp\left[\frac{2}{(2+Q^2)^{1/2}}\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{s_\phi}{N_\phi}\right] \quad 1 \leq n \leq N_\phi.
\tag{A-30}$$

6. 对每一个 Φ 和 Q，选择 时间为：

$$\tau_n = \tau_{\min} + \frac{Q}{2\pi\phi}\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{s_\tau}{N_\tau} \quad 1 \leq n \leq N_\tau.
\tag{A-31}$$

我们最终发现，基底方程的结果 Q 是成对数分布，频率成对数分布，时间成线性分布。

原文索引

- [1] Shourov Keith Chatterji. The search for gravitational wave bursts in data from the second LIGO science run [D]. Massachusetts Institute of Technology ,1995.

